



Titre: Vérification et validation d'une loi de paroi consistante du modèle
Title: de turbulence K-w SST

Auteur: Francis Lacombe
Author:

Date: 2017

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Lacombe, F. (2017). Vérification et validation d'une loi de paroi consistante du
Citation: modèle de turbulence K-w SST [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/2557/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/2557/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** Dominique Pelletier
Advisors:

Programme: Génie mécanique
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

VÉRIFICATION ET VALIDATION D'UNE LOI DE PAROI CONSISTANTE DU
MODÈLE DE TURBULENCE $K - \omega$ SST

FRANCIS LACOMBE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
MAI 2017

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

VÉRIFICATION ET VALIDATION D'UNE LOI DE PAROI CONSISTANTE DU
MODÈLE DE TURBULENCE $K - \omega$ SST

présenté par : LACOMBE Francis

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. GARON André, Ph. D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. VÉTEL Jérôme, Doctorat, membre

DÉDICACE

*À ma compagne Marie-Eve
qui avait si hâte que je finisse mes simulations*

REMERCIEMENTS

J'aimerais d'abord remercier mon directeur de recherche Dominique Pelletier pour les judicieux conseils qu'il a su m'apporter tout au long du projet, mais également pour la grande confiance qu'il m'a témoignée dès mon arrivée au laboratoire à titre de stagiaire d'été.

Je remercie Marie-Eve pour son soutien et son incroyable patience.

J'adresse aussi mes remerciements à mes amis du labo pour la bonne ambiance de travail, Étienne, Victor, Sébastien et Yohan, vous me manquerez.

RÉSUMÉ

Le modèle de turbulence $k - \omega$ SST est très répandu dans les codes de CFD modernes, car il offre de bonnes performances pour une vaste gamme de problèmes. Il fait notamment bonne figure dans les zones de fort gradient de pression adverse. La force de ce modèle réside dans sa capacité à exploiter les avantages des deux modèles de turbulence les plus populaires, le $k - \epsilon$ et le $k - \omega$. Le premier pour ses bonnes performances dans les zones d'écoulement libre, et le second pour sa pertinence dans les zones cisailées, plus particulièrement dans les couches limites. Par ailleurs, le modèle $k - \omega$ SST est intégrable jusqu'à la paroi et donc compatible avec les modèles bas-Reynolds et l'approche des lois de paroi consistantes. Les lois de paroi consistantes présentent l'avantage, par rapport aux lois de paroi standard, d'être entièrement consistantes avec le modèle de turbulence avec lequel elles sont utilisées. En effet, dans l'approche consistante des lois de paroi, les variables adimensionnelles de vitesse, température et de turbulence sont interpolées dans des tables spécifiques à chaque modèle de turbulence. Ces dernières sont produites à partir de la résolution des équations RANS 1D dans la couche limite. On s'assure ainsi d'imposer des conditions limites cohérentes en faisant un minimum d'hypothèse sur l'écoulement.

Ce mémoire présente une formulation tout couplée pour le modèle de turbulence $k - \omega$ SST. Nous y proposons entre autres une démarche générale pour le développement et l'implémentation de lois de paroi consistantes et consistantes. Nous explorons au passage les principales étapes de l'implémentation d'un modèle de turbulence dans un code de CFD par éléments finis. En ce sens, nous dérivons la forme faible au sens de Galerkin ainsi que la forme stabilisée (*Stabilized Upwind* et *Stabilized Upwind Petrov Galerkin*) des équations aux dérivées partielles du modèle de turbulence $k - \omega$ SST. Nous traitons également du couplage des équations et des principaux algorithmes de résolution. Nous abordons ensuite le traitement des conditions limites en zone proche paroi et leur impact sur l'ordre de convergence de la méthode de Newton. Nous proposons également une stratégie d'adaptation selon les fonctions de pondération du modèle de turbulence $k - \omega$ SST. Enfin, nous abordons l'aspect vérification à l'aide de la technique des solutions manufacturées et finirons par faire la validation du modèle à l'aide de cas tests typiques en modélisation RANS.

ABSTRACT

The turbulence $k - \omega$ SST model is very common in modern CFD codes because of its good performance over a wide range of industrial problems. Particularly in areas of strong adverse pressure gradient. The strength of the model lies in its ability to take advantage of two of the most popular turbulence models, the $k - \epsilon$ and the $k - \omega$. The former for its good performance in free shear flows, and the second for its relevance in wall bounded flows, more specifically in boundary layers. Moreover, the $k - \omega$ SST model is valid in the whole boundary layer and is, therefore, compatible with low-Reynolds models and therefore the consistent wall law approach. The consistent wall function has the advantage, compared to the standard wall laws, to be entirely consistent with the turbulence model for which it has been derived. In the consistent wall law approach, the non-dimensional variables of speed, temperature and turbulence are interpolated from a model specific table unique to each turbulence model. Those tables are produced from the numerical resolution of the one-dimensional RANS equations for turbulent Couette flow. In this way, we ensure the imposition of coherent boundary conditions for all variables up to the wall.

In this master's thesis, we present a fully coupled formulation of the $k - \omega$ SST turbulence model. We propose among others a general approach for the development and the implementation of consistent wall functions. We explore the main steps of the implementation of a turbulence model in a finite elements based CFD code. In this manner, we derive the weak form, in the sense of Galerkin, as well as its stabilized weak form of the $k - \omega$ SST equations. We also discuss the coupling of the equations and their main algorithms of resolution. We then discuss the treatment of boundary conditions in the near-wall region and their impact on the convergence of the Newton's method. We also propose a mesh adaptation strategy according to the blending function of the $k - \omega$ SST model. Finally, we investigate the verification aspect using the technique of manufactured solutions and will validate the model using typical test cases in RANS modeling.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	III
REMERCIEMENTS	IV
RÉSUMÉ	V
ABSTRACT	VI
TABLE DES MATIÈRES	VII
LISTE DES TABLEAUX	X
LISTE DES FIGURES	XI
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	XIV
LISTE DES ANNEXES	XVI
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 La modélisation de la turbulence	1
1.1.1 L'approche moyennée de Reynolds (RANS)	1
1.1.2 Modèles algébriques	3
1.1.3 Modèles à une et deux équations	3
1.2 Traitement des parois solides	6
1.2.1 Conditions limites	6
1.2.2 Lois de paroi	7
1.3 But et objectifs	13
CHAPITRE 2 MODÈLE $K - \omega$ SST DE MENTER	15
2.1 Modèle BSL de 1994	15
2.2 Modèle SST standard de 2003	17
2.2.1 Formulation adimensionnelle	19
2.2.2 Formulation logarithmique	20
2.3 Équations RANS 1D dans la couche limite	21
CHAPITRE 3 CONSIDÉRATIONS NUMÉRIQUES	24

3.1	Éléments-finis	24
3.1.1	Formulation faible	24
3.1.2	Stabilisation SU/SUPG	26
3.2	Condition de tangence	28
3.2.1	Méthode de pénalisation	28
3.3	Lois de paroi	29
3.3.1	Lois de paroi standards à une échelle de vitesse	29
3.3.2	Lois de paroi consistantes à une et deux échelles de vitesse	30
3.4	Les différents algorithmes de calcul de la distance à la paroi	31
3.4.1	Recherche par arbre k-D	32
3.4.2	Propagation d'onde	32
3.4.3	Avance couche par couche	33
3.4.4	Avance de sphères voxelisées	33
3.5	Couplage des équations	38
3.5.1	Approche couplée : Méthode de Newton	40
3.5.2	Approche semi-couplée : Méthode du point fixe	42
3.6	Ordre de convergence	44
3.7	Adaptation du maillage	46
3.7.1	Estimation d'erreur par projection locale	47
3.7.2	Raffinement du maillage	49
CHAPITRE 4	APPLICATION	51
4.1	Vérification : méthode des solutions manufacturées (MMS)	51
4.1.1	Couche turbulente cisailée avec lois de paroi	53
4.2	Validation : Étude de cas tests	56
4.2.1	Plaque plane sans gradient de pression	56
4.2.2	Marche descendante sans gradient de pression adverse	61
4.2.3	Marche descendante avec gradient de pression adverse	72
4.2.4	Jet turbulent impactant avec transfert thermique	78
CHAPITRE 5	CONCLUSION	86
5.1	Synthèse des travaux	86
5.2	Limitations de la solution proposée	87
5.3	Améliorations futures	87
5.3.1	Sensibilisation au gradient de pression	87
5.3.2	Distance de raccordement variable	88
5.3.3	Condition de tangence	88

5.3.4	Adaptation du maillage	88
RÉFÉRENCES		89
ANNEXE		96

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Avantages et inconvénients des algorithmes couplés et semi-couplés .	44
Tableau 4.1	Comparaison de la longueur de la zone de recirculation obtenus numériquement avec les modèles SST, BSL et SST-MBR avec les données expérimentales pour le cas de la marche descendante avec paroi supérieure horizontale	68
Tableau 4.2	Comparaison de la longueur de la zone de recirculation obtenues numériquement avec les modèles SST, BSL et SST-MBR avec les données expérimentales pour le cas de la marche descendante avec gradient de pression adverse	75

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Illustration de la loi de paroi ©Aokomoriuta (2011). Reproduit avec permission	10
Figure 1.2	$\frac{\partial k^+}{\partial y^+}$ pour un écoulement de Couette sans gradient de pression	12
Figure 2.1	Tabulation de u^+ (a), T^+ (b), k^+ (c), et ω^+ (d) dans la couche limite	22
Figure 3.1	Comparaison des deux méthode de balayage de cercle discret. Copyright Pethrus, 2006. Reproduit avec permission (Pethrus, 2007) . . .	35
Figure 3.2	Le domaine est discrétisé et l'accès à ses éléments se fait de manière entière. Chaque élément est un objet contenant des informations spécifiques : Position discrète (i, j), indicateur surface (vrai/faux), liste des points contenus dans l'élément (x, y), nombre de points.	38
Figure 3.3	(a) Temps de calcul de la distance paroi en fonction du nombre de points sur les parois pour différents nombre de points dans le domaine, (b) Pente en fonction du nombre de points dans le domaine, (c) Temps de calcul de la distance paroi en fonction du nombre de points dans le domaine pour différents nombre de points sur les surfaces, (d) Pente en fonction du nombre de points sur les surfaces	39
Figure 3.4	Contour de la distance paroi sur un domaine comprenant deux cercles et un profil d'aile entre 4 parois. Le domaine contient 800 000 noeuds, 7250 sont sur les parois. Temps de calcul : 3,92 secondes	40
Figure 3.5	Illustration de la méthode de Newton en 1D, en abscisse on a x et en ordonné R(x). Copyright L. Cham, 2004. Reproduit avec permission (Cham, 2004)	42
Figure 3.6	Illustration de la méthode du point fixe (substitution) en 1D, en abscisse on a x et en ordonné R(x)	45
Figure 3.7	Norme L_2 du résidu pour une plaque plane sans gradient de pression à $Re = 5M$ avec lois de paroi consistantes	46
Figure 3.8	Exemple typique d'un <i>patch</i> pour des éléments quadratiques. Les symboles ∇ représentent l'échantillonnage du gradient de la solution éléments finis (∇Q_h)	47
Figure 3.9	(a) Illustration de la projection de ∇Q^* sur la base de l'élément (b) Une fois que le gradient de la solution globale a été récupéré sur la base élémentaire, il ne reste plus qu'à évaluer l'erreur.	49
Figure 4.1	Domaine de calcul de la solution manufacturée	54

Figure 4.2	Convergence de la semi norme H1 de l'erreur absolue exacte en fonction du nombre de points dans le domaine	55
Figure 4.3	(a) Coefficient de friction et (b) Nombre de Stanton en fonction de x/L sur une plaque plane sans gradient de pression à $Re = 5M$	59
Figure 4.4	(a) Position y^+ de raccordement sur la loi de paroi en fonction de x/L (b) Profil de vitesse u^+ à $x/L = 1$ en fonction de y^+ sur une plaque plane sans gradient de pression à $Re = 5M$	60
Figure 4.5	Aperçu de la géométrie de la marche descendante pour l'expérience de Driver et Seegmiller (Driver and Seegmiller, 1985)	61
Figure 4.6	Le bout de la marche crée une zone de cisaillement libre en raison la faible vitesse dans la zone de recirculation comparativement à celle de l'écoulement libre	62
Figure 4.7	Schéma des conditions limites pour la marche à $Re_h = 36000$	62
Figure 4.8	(a) Profils de vitesse à différentes stations du problème de la marche descendante sans gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$ (b) Vue rapprochée	64
Figure 4.9	(a) Profils de $\overline{u'v'}$ à différentes stations du problème de la marche descendante sans gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$ (b) Vue rapprochée	66
Figure 4.10	(a) Viscosité turbulente pour le modèle $k-\omega$ BSL (b) et pour le modèle $k-\omega$ SST pour le problème de la marche descendante sans gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$	67
Figure 4.11	(a) Coefficient de pression et (b) coefficient de friction pour le problème de la marche descendante sans gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$	69
Figure 4.12	Les lignes de courant montrent clairement la première et deuxième bulle de recirculation pour la marche descendante sans gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$	70
Figure 4.13	Troisième bulle de recirculation pour la marche descendante sans gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$	70
Figure 4.14	Impact du gradient de pression adverse sur les lois de parois	72
Figure 4.15	(a) Profils de vitesse à différentes stations du problème de la marche descendante avec gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$ (b) Vue rapprochée	73
Figure 4.16	(a) Profils de $\overline{u'v'}$ à différentes stations du problème de la marche descendante avec gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$ (b) Vue rapprochée	74

Figure 4.17	Distribution du y^+ le long de la paroi pour le problème de la marche descendante avec gradient de pression adverse	76
Figure 4.18	(a) Coefficient de pression et (b) coefficient de friction pour le problème de la marche descendante avec gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$	77
Figure 4.19	Schéma du montage expérimental du jet turbulent impactant avec transfert de chaleur à $Re_{D_h} = 22000$, ©Narayanan et al. (2004). Reproduit avec la permission de Elsevier	79
Figure 4.20	Le premier maillage contient près de 30 000 éléments, tandis que le dernier en contient 500 000, la majorité des éléments sont concentrés sur la paroi	80
Figure 4.21	Coefficient de transfert de chaleur local Nu mis à l'échelle par rapport au coefficient de transfert de chaleur au point de stagnation Nu_0 . . .	81
Figure 4.22	Distribution de y^+ en fonction de la distance au point de stagnation .	82
Figure 4.23	Aperçu de la solution du jet impactant à $Re_{D_h} = 22000$ sur le maillage final : 500 000 noeuds	83
Figure 4.24	Champ vectoriel des mesures expérimentales du jet impactant à $Re_{D_h} = 22000$, ©Narayanan et al. (2004). Reproduit avec la permission de Elsevier	84

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Abréviations

SST	Shear Stress Transport
BSL	Baseline
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes
LES	Large Eddy Simulation
DNS	Direct Numerical Simulation
DES	Detached Eddy Simulation
CFD	Computational Fluid Dynamics

Notation générale

x_i	i-ième coordonnée du vecteur x
\bar{x}	Variable moyennée
x'	Variable de fluctuation par rapport à la moyenne
x^+	Variable mise sans dimension dans la couche limite turbulente
x_{mms}	Variable déduite à partir de la solution manufacturée

Définitions

c_p	Capacité thermique à pression constante
k	Énergie cinétique de turbulence
K	Logarithme de k
ω	Taux de dissipation spécifique de l'énergie cinétique de turbulence
W	Logarithme de ω
μ_t	Viscosité turbulente dynamique
ν_t	Viscosité turbulente cinématique
λ	Conductivité dynamique
λ_t	Conductivité turbulente dynamique
Re	Nombre de Reynolds
Re_t	Nombre de Reynolds turbulent
Pr	Nombre de Prandtl
Pr_t	Nombre de Prandtl turbulent
ρ	Densité
u_τ	Vitesse de frottement

u_k	Deuxième échelle de vitesse basée sur l'énergie cinétique de turbulence k
κ	Constante de Karman
P_k, P_ω	Termes de production des équations k et ω
$\beta^*, \sigma_k, \sigma_\omega$	Constantes de fermeture du modèle $k - \omega$ SST
S	Magnitude du tenseur de déformation
Ω	Magnitude de la vortacité
Ω	Ouvert de \mathbb{R}^n
Γ_N	Frontière de Ω
τ_w	Cisaillement à la paroi
q_w	Transfert de chaleur à la paroi
ϕ	Fonction d'interpolation éléments finis
τ_{supg}	Terme de décentrement pour la formulation SUPG
h_{ugn}	Taille caractéristique entrant dans la définition de τ_{supg}
N_k, N_ω	Termes de stabilisation SUPG
\vec{n}	Vecteur normal à une surface

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A : DÉVELOPPEMENT DES ÉQUATIONS DE K ET ω SANS DIMENSION 96

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

When I meet God, I am going to ask him two questions : Why relativity, and why turbulence ? I really believe he will have an answer for the first.

Werner Heisenberg

La turbulence est un phénomène complexe qui, malgré les récentes avancées en modélisation numérique, demeure encore aujourd’hui mal compris. Il existe plusieurs définitions de la turbulence, celle de Lewis Richardson est particulièrement imagée ; « Big whorls have little whorls, which feed on their velocity, and little whorls have lesser whorls, and so on to viscosity. » (Richardson, 2007). Cette citation de Richardson illustre bien le phénomène de cascade d’énergie qui règne au sein d’un écoulement turbulent. Selon sa définition, les écoulements turbulents seraient en fait composés d’une infinité de vortex de différentes tailles ayant chacun une vitesse et un temps caractéristiques. L’énergie cinétique de la turbulence serait alors alimentée à partir de l’écoulement moyen par l’entremise des plus grandes échelles et à travers un mécanisme essentiellement non-visqueux, l’étirement des vortex (Pope, 2000). Les plus grandes échelles transfèrent ensuite l’énergie aux plus petites et ainsi de suite jusqu’à ce que l’énergie contenue dans les vortex ne soit plus assez grande pour en former de plus petits, auquel cas, l’énergie est alors dissipée par la viscosité moléculaire sous forme de chaleur. Ceci se produit lorsque la taille des vortex atteint l’échelle de Kolmogorov.

1.1 La modélisation de la turbulence

Il existe plusieurs approches pour modéliser la turbulence, les principales sont, en ordre croissant du coût des simulations : les équations de Navier-Stokes moyennées (RANS), l’approche des tourbillons détachés (DES), la simulation des grandes échelles (LES), et la simulation numérique directe (DNS).

1.1.1 L’approche moyennée de Reynolds (RANS)

L’idée derrière l’approche RANS est de faire l’hypothèse que l’écoulement peut se décomposer en deux parties distinctes, l’écoulement moyen et sa fluctuation : $u(\vec{x}, t) = \bar{u}(\vec{x}) + u'(\vec{x}, t)$. En injectant cette expression dans les équations de Navier-Stokes et en prenant la moyenne temporelle, on obtient les équations dites de *Reynolds*.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-\bar{p} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u'_i u'_j} \right] \quad (1.2)$$

avec la moyenne temporelle d'une variable quelconque x définie de la façon suivante :

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x dt \quad (1.3)$$

Le système semble bien simple, mais le terme additionnel $-\overline{\rho u'_i u'_j}$, appelé tenseur de *Reynolds*, est un tenseur symétrique à 6 degrés de liberté dont les composantes sont inconnues. On a donc une équation et 6 inconnues en trop. Or, il existe une procédure pour générer les équations pour les composantes du tenseur de Reynolds ; il suffit de multiplier les équations de Navier-Stokes par les composantes de fluctuation du tenseur de Reynolds. On obtient alors, en incompressible, l'équation du tenseur de Reynolds où $\bar{\tau}_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$.

$$\begin{aligned} \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} = & -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{\rho u'_i u'_j u'_k} + \overline{p'(\delta_{kj} u'_i + \delta_{ik} u'_j)} \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_k} \right] \\ & - \rho \left(\bar{\tau}_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \bar{\tau}_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) - 2\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Cependant, on se rendra vite compte que l'on se retrouve avec le même problème, on crée plus d'inconnues (22) que de nouvelles équations, le terme $\overline{\rho u'_i u'_j u'_k}$ en produisant 10 à lui seul. C'est ce qu'on appelle le problème de fermeture des équations de turbulence (*Closure problem*, en anglais) (Wilcox, 1998; Pope, 2000). La plupart des modèles RANS font l'hypothèse que la turbulence est un phénomène isotrope qui dépend linéairement du tenseur des contraintes visqueuses (Schmitt, 2007). Ceci permet de *fermer* l'équation 1.2, en exprimant le tenseur de Reynolds sous la forme d'une contrainte visqueuse additionnelle.

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = 2\mu_T S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (1.5)$$

avec

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.6)$$

On nomme cette supposition *l'approximation de Boussinesq sur la viscosité turbulente*. Ce concept peut sembler très contradictoire, car, comme on l'a vu plus tôt, la turbulence se développe par le biais d'un mécanisme essentiellement non-visqueux. Cependant, à mesure

que l'on augmente le nombre de Reynolds, l'échelle de Kolmogorov, $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$, diminue. Les petites échelles ont de très hautes fréquences, ce qui fait que plus le nombre de Reynolds est élevé, plus la base de la cascade d'énergie s'élargie et tend à s'uniformiser (Kolmogorov, 1890; Townsend and Taylor, 1948). En d'autres mots, l'écoulement devient de plus en plus dissipatif, à mesure que le nombre de Reynolds augmente.

Le postulat de Boussinesq simplifie grandement les choses, mais comporte certaines limitations. Notamment, le fait qu'il n'existe *a priori* aucune raison de croire que les contraintes du tenseur de Reynolds dépendent du gradient de l'écoulement moyen (Liu et al., 2014). Ou encore qu'il n'est pas possible de prendre en compte les effets de relaxation du tenseur de Reynolds à l'aide d'un terme de dissipation additionnel (μ_t). Finalement, le caractère isotrope de l'hypothèse ne permet pas non plus de faire la distinction entre une contrainte planaire ou une contrainte de cisaillement (Speziale, 1991).

1.1.2 Modèles algébriques

À partir de l'hypothèse de Boussinesq, plusieurs catégories de modèles de turbulence ont vu le jour. Les premiers furent les modèles algébriques. Ceux-ci sont basés sur la supposition que la viscosité turbulente, au même titre que le nombre de Reynolds, est une quantité intrinsèque de l'écoulement qu'il faut préciser *a priori* à partir de sa longueur de mélange. Le concept de longueur de mélange, proposé par Prandtl en 1928 (Schlichting and Gersten, 2017; Prandtl, 1928), est intimement lié à la théorie des solutions de similitude. Pour certains problèmes (comme une plaque plane (Blasius), un jet turbulent, une couche de mélange, etc.) il est possible de développer une solution de similitude à partir de laquelle on peut déduire une longueur caractéristique de mélange. Ce type de modèle est le plus simple de tous et mène à de bons résultats pour la classe de problèmes avec laquelle il a été optimisé. Il faut cependant garder à l'esprit que ces modèles sont incomplets (Wilcox, 1998), car ils nécessitent une foule d'hypothèses préalables et que leur domaine d'application se résume aux problèmes pour lesquelles il est possible de développer une solution de similitude.

1.1.3 Modèles à une et deux équations

Les modèles à une et deux équations sont similaires dans la mesure où ils utilisent l'hypothèse de Boussinesq sur la viscosité turbulente et qu'ils la modélisent à partir d'une équation pour l'énergie cinétique turbulente. Les modèles à une équation sont cependant incomplets car ils basent leur échelle de longueur turbulente sur des caractéristiques dimensionnelles de

l'écoulement. À l'inverse de ceux-ci, les modèles à deux équations sont dits complets car ils sont en mesure de fournir cette longueur caractéristique à partir d'une deuxième équation (Wilcox, 1998).

L'hypothèse commune de ces types de modèles de turbulence nous vient de Prandtl (Prandtl et al., 1945) qui choisit de baser son échelle de vitesse caractéristique sur l'énergie cinétique de la turbulence.

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (1.7)$$

Ce qui lui permet d'écrire

$$\nu_t = C \sqrt{k} l \quad \text{et} \quad \bar{\tau}_{ii} = -\overline{u'_i u'_i} = -2k \quad (1.8)$$

où C est une constante et l la longueur caractéristique turbulente

À partir de ces hypothèses et de l'équation 1.4, il est possible de définir une équation de transport pour k .

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \rho \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \overline{\rho u'_i u'_i u'_j} + \overline{p' u'_j} - \mu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \quad (1.9)$$

Jusqu'ici, l'équation 1.9 demeure exacte ; aucune hypothèse n'a été émise pour modéliser ses termes. Maintenant, si on s'attarde à l'aspect physique de l'équation 1.9. Dans le membre de gauche de l'équation, on a le terme de **convection** $\rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j}$, par lequel l'énergie cinétique de la turbulente se transporte dans l'écoulement. Il agit à l'échelle macroscopique. Dans le membre de droite de l'équation, on a le terme de **production** $\rho \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$, qui permet l'échange d'énergie entre l'écoulement moyen et les fluctuations turbulentes. On a ensuite le terme de **transport turbulent** avec la triple corrélation $\overline{\rho u'_i u'_i u'_j}$, qui agit un peu comme le terme de convection mais à l'échelle des fluctuations. Autrement dit, le taux avec lequel l'énergie cinétique turbulente est transportée par les fluctuations. Son échelle caractéristique étant beaucoup plus petite que celle de la convection, son impact se situe à l'échelle microscopique. Le terme de **diffusion de la pression** $\overline{p' u'_j}$, quant à lui, représente le couplage entre les fluctuations de pression et de vitesses. Le terme de **diffusion moléculaire** $\mu \frac{\partial k}{\partial x_j}$ représente le taux avec lequel la turbulence est dissipée par le mouvement des particules (Pope, 2000). Finalement, le dernier terme $\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}$, représente le processus par lequel l'énergie cinétique turbulente est dissipée par les fluctuations de vitesse. On y réfère souvent par ϵ , le terme de

dissipation spécifique. (Wilcox, 1998)

Il va de soi que l'équation 1.9 ne peut pas être utilisée telle quelle étant donné le peu d'information disponible pour chaque terme. Prandtl (Prandtl et al., 1945) a été le premier à proposer une version modélisée de l'équation 1.9 qui permet de réellement fermer l'équation en vue d'une résolution numérique. Pour ce faire, il a eu recours à une approche de modélisation terme par terme en s'attardant à chacun des termes puis en y proposant une alternative modélisée. Il reprit d'abord l'hypothèse de Boussinesq et postula premièrement que le tenseur de Reynolds peut s'exprimer sous la forme $\rho\bar{\tau}_{ij} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3}k\delta_{ij}$. Il reprit ensuite le terme de transport de la turbulence, le regroupa avec celui de la diffusion de la pression, faute de données expérimentales pour ce dernier, et fit l'hypothèse que ce terme se comporte de façon à ce que $\frac{1}{2}\rho\overline{u'_i u'_i u'_j} + \overline{p' u'_j} = -\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}$, avec σ_k , un coefficient de fermeture qui devra être optimisé. Le dernier terme à modéliser est celui de la dissipation spécifique, et c'est sur ce point que les modèles à une et deux équations diffèrent. Le premier reprenant l'argument de Taylor (Taylor, 1935) selon lequel $\epsilon \sim C \frac{\sqrt{k^3}}{l}$. Ce qui nous amène à l'équation suivante pour les modèles à une équation.

$$\rho u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \rho \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C \frac{\sqrt{k^3}}{l} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \quad (1.10)$$

Et à simplement ce qui suit pour les modèles à deux équations.

$$\rho u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \rho \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \quad (1.11)$$

L'approche à deux équations privilégie de rester dans la généralité en proposant une équation distincte pour ϵ . À partir de ce point, les opinions divergent quant à la façon de formuler la deuxième équation. Certains, comme Kolmogorov (Kolmogorov, 1941) qui proposa le premier modèle à deux équations, sont passés par l'analyse dimensionnelle tandis que d'autres ont adapté le raisonnement de Prandtl pour l'équation de ϵ . C'est notamment le cas de (Launder and Sharma, 1974) qui ont proposé le modèle $k - \epsilon$ standard. Leur raisonnement est similaire à celui de Prandtl dans la mesure où ils ont développé une équation pour ϵ à partir de l'équation 1.4, puis ont proposé une équation modélisée selon la même approche, terme par terme.

$$\rho u_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \rho C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] \quad (1.12)$$

Bref, bien que les modèles à deux équations soient, de loin, les plus utilisés en CFD, les modèles à une équation ne leur sont pas inférieurs pour autant. Si on prend par exemple le modèle à une équation de Spalart-Allmaras (P. and Allmaras, 1992), un modèle qui a été optimisé pour les écoulements autour de profils d’aile, celui-ci fait très bonne figure dans bon nombres de problèmes d’application aérodynamique. Il surpasse même beaucoup de modèles à deux équations pour les problèmes comportant des zones avec gradient de pression adverse, des conditions particulièrement difficiles à modéliser dans le monde RANS.

1.2 Traitement des parois solides

Bien que les méthodes expérimentales s’améliorent d’année en année, certaines données comme les contraintes de Reynolds, ou encore le cisaillement ou le champ de vitesse instantanée sont des quantités difficiles à mesurer dans la couche limite, et encore plus dans un écoulement quelconque. En ce sens, le recours à des simulations numériques directes (DNS) a permis de faire de grandes avancées en mécanique des fluides qui n’auraient pas pu être faites autrement. Particulièrement dans le domaine du traitement numérique des parois car elles fournissent toute l’information requise pour calculer les corrélations non-mesurables dans la couche limite (ex. $\overline{\rho p' u_j'}$). L’étude de cas simples tels que celui d’une couche limite 1D, a rendu possible la visualisation et la validation de certaines hypothèses concernant le comportement des variables de turbulence ($k, \epsilon, \omega, etc.$) près des parois. En voici trois soulignées par Pope (Pope, 2000).

- Le nombre de Reynolds turbulent ($Re_t = \frac{k^2}{\epsilon \nu}$) tend vers 0 à mesure que l’on s’approche de la paroi
- Le cisaillement augmente à mesure que l’on s’approche de la paroi, pour atteindre son maximum à $y=0$.
- La turbulence devient 2D étant donné que v' varie en $O(y^4)$ tandis que u' et w' varient en $O(y^2)$. v' tend plus vite vers 0 que les autres composantes de fluctuation.

Ces hypothèses sont en quelque sorte les fondations qui ont servi au développement de conditions limites consistantes dans le domaine de la modélisation numérique des parois.

1.2.1 Conditions limites

Comme on l’a mentionné plus tôt, au niveau des conditions limites, les quantités turbulentes ($k, \epsilon, \omega, etc.$) sont celles qui ont été les plus problématiques à développer. En effet, à l’inverse de la vitesse, pour laquelle une simple condition de non-glissement ($u = v = 0$) peut être

imposée, il a fallu attendre la fin des années 70 pour obtenir des données numériques de DNS suffisamment précises pour établir des bases solides (Aronson et al., 1997; Perot and Moin, 1995; Thomas and Hancock, 1977) pour les quantités turbulentes. Ces résultats ont d’ailleurs permis de conclure que le modèle $k - \epsilon$ standard surestimait la viscosité turbulente dans la couche limite, particulièrement dans la sous-couche visqueuse. Un terme d’amortissement *ad-hoc* entrant dans la définition de la viscosité turbulente a été proposé par Jones et Launder (Jones and Launder, 1972) de manière à limiter la valeur de la viscosité turbulente μ_t . Selon Jones et Launder, ce terme était vu comme une correction due à la linéarisation de l’écoulement près de la paroi, il fut toutefois critiqué par Durbin (Durbin, 1991) pour son interprétation physique. Ce dernier affirmant que la raison de l’écart observé dans la viscosité turbulente était dû à la condition de non-pénétration à la paroi (v' tend vers 0 très rapidement près de la paroi, ce qui aurait tendance à faire diminuer k également plus rapidement que ce qui était calculé par le modèle $k - \epsilon$ standard). Certains modèles de turbulence sont toutefois exempts de ce type de fonction d’amortissement et peuvent être intégrés jusqu’à la paroi, le modèle $k - \omega$ de Wilcox (Wilcox, 2008), le $k - \epsilon$ de Launder-Sharma (Launder and Sharma, 1974) ou encore le modèle $k - \tau$ de Speziale (Speziale et al., 1992) en sont quelques exemples. Le point commun de ces modèles de turbulence est leur capacité à bien quantifier le ratio de production/dissipation de la turbulence jusque dans la couche limite. L’avantage de ce type de modèle est leur capacité à traiter les parois solides à l’aide de simples conditions de Dirichlet, sans avoir recours à des fonctions d’amortissement. En modélisation RANS, il s’agit de la référence pour l’imposition des conditions limites puisqu’en intégrant jusqu’à la paroi, on s’assure de capturer toute la physique de l’écoulement, y compris celle contenue dans la couche limite.

L’intégration jusqu’à la paroi requiert un maillage particulièrement fin. Parfois, le maillage requis pour traiter certains problèmes industriels à haut nombre de Reynolds n’est tout simplement pas atteignable en terme de ressources informatiques. On a alors recours à ce qu’on appelle des lois de paroi, afin de modéliser ce qui se passe près des parois (dans la couche limite) et ainsi réduire les coûts.

1.2.2 Lois de paroi

Les premières lois de paroi ont été développées dans les années 60 dans le but de réduire la taille des systèmes d’équations à résoudre (Spalding, 1967; Wolfshtein, 1969). Le principe général est relativement simple, on fait l’hypothèse que tous les problèmes comportant des parois visqueuses sont similaires à celui de la couche limite 1D, du moins, dans les zones

près des parois (lorsque la distance normale à la paroi tend vers 0). Dans cette optique, en utilisant les hypothèses de la couche limite il est possible de montrer que l'équation 1.2 se simplifie et peut être ré-écrite de la façon suivante.

$$\frac{d}{dy} \left((\mu + \mu_t) \frac{d\bar{u}}{dy} \right) = 0 \quad (1.13)$$

En intégrant dans la direction normale à la surface, on peut facilement déduire que

$$(\mu + \mu_t) \frac{d\bar{u}}{dy} \Big|_{y=0} = \tau_w \quad (1.14)$$

En posant $u^+ = \bar{u}/u_\tau$ et $y^+ = y u_\tau / \nu$, il est possible de simplifier davantage l'équation 1.14 pour obtenir

$$(1 + \nu_t^+) \frac{du^+}{dy^+} = 1 \quad (1.15)$$

Or, la turbulence tend vers 0 au voisinage immédiat de la paroi ($y \rightarrow 0$), par conséquent, les termes visqueux y deviennent dominants et la viscosité turbulente devient alors négligeable. Cette zone qui correspond à $y^+ < 5$, est appelée la *sous-couche visqueuse* ou *zone linéaire*. L'équation 1.15 se simplifie alors à

$$u^+ = y^+ \quad (1.16)$$

et on a donc

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{y u_\tau}{\nu} \quad (1.17)$$

On en déduit la vitesse de frottement

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\bar{u} \nu}{y}} \quad (1.18)$$

Et le frottement pariétal

$$\tau_w = -\rho u_\tau^2 \quad (1.19)$$

Les modèles à bas-Reynolds qui ne nécessitent pas une imposition stricte d'une condition

de non-glissement utilisent cette approximation pour calculer le frottement pariétal. Afin de demeurer dans leur domaine de validité, il faut vérifier que l'épaisseur de la première maille de calcul respecte la condition de $y^+ < 5$. Le grand désavantage de ce type de modèle est que cette quantité ne peut être calculée qu'*a posteriori*.

Si on s'éloigne un peu de la paroi ($y^+ > 30$), le terme turbulent dans l'équation 1.15 devient prépondérant et l'équation 1.15 peut être ré-écrite sous la forme suivante.

$$\nu_t^+ \frac{du^+}{dy^+} = 1 \quad (1.20)$$

En utilisant l'hypothèse de Prandtl pour la viscosité turbulente $\nu_t^+ = \kappa y^+$, on peut en déduire une relation analytique adimensionnelle reliant la distance normale (y^+) et la vitesse de frottement (u_τ) (Wilcox, 1998).

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \log(Ey^+) \quad (1.21)$$

et dont on peut faire la résolution sous la forme suivante

$$u = \frac{u_\tau}{\kappa} \log\left(E \frac{yu_\tau}{\nu}\right) \quad (1.22)$$

où $\kappa = 0.41$ et $E = 0.9$, pour une paroi lisse. L'équation 1.22 doit alors être résolue numériquement afin de déterminer la valeur de u_τ et ainsi calculer le frottement pariétal approprié. Si on résume, on obtient grosso modo ceci

$$U^+ = y^+ \quad \text{si } y^+ < 5 \quad (1.23)$$

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \log(Ey^+) \quad \text{si } y^+ > 30 \quad (1.24)$$

Les premières lois de paroi furent construites pour que le raccordement aux modèles de turbulence se fasse dans la zone logarithmique (dans la *log-law region* sur la figure 1.1) et par conséquent, ne sont valides que pour une certaine gamme de distance à la paroi ($30 < y^+ < 300$) (George, 2007), en dehors de cette plage, celles-ci sont fausses. En présence d'un gradient de pression, le domaine de validité s'amenuise et tend à faire diminuer la borne supérieure. C'est pourquoi, en pratique, on essaie le plus possible d'avoir une valeur de y^+ près de 30. Plus spécifiquement, la résolution numérique de l'équation 1.22 permet de déterminer la contrainte de

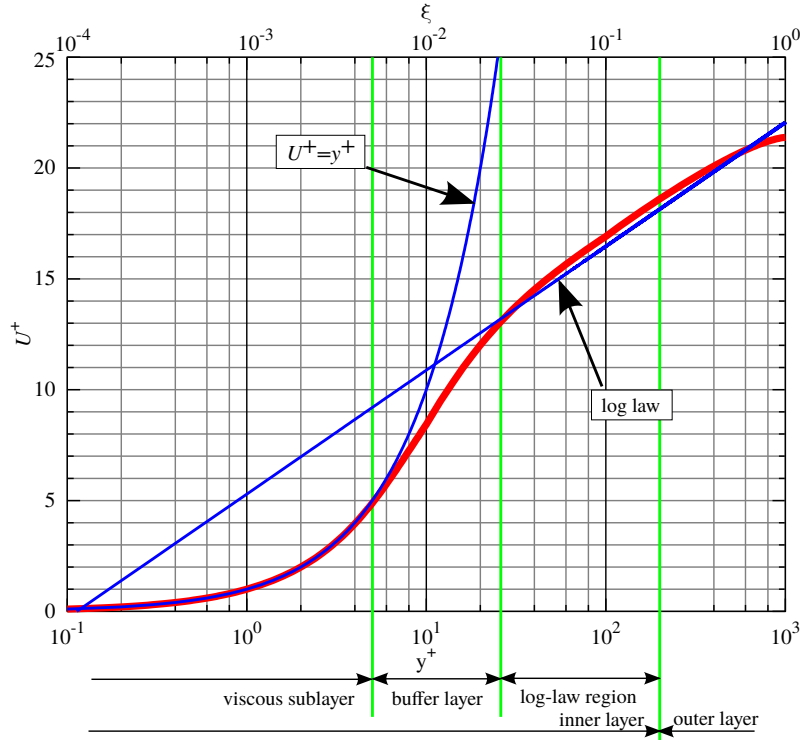


Figure 1.1 Illustration de la loi de paroi ©Aokomoriuta (2011). Reproduit avec permission

cisaillement équivalente à l'effet de la couche limite et de l'appliquer en direction tangentielle à la frontière. Dans la direction normale, une simple condition de non-pénétration suffit.

En ce qui concerne les conditions limites pour les quantités turbulentes (k , ω , ϵ , etc.), on se sert généralement des développements asymptotiques des équations de transport pour appliquer les conditions limites appropriées; la plupart du temps $\frac{\partial k}{\partial n} = 0$ et $\omega = f(y^+)$. Bref, cette technique permet de réduire considérablement la finesse du maillage près des parois, car, bien qu'elle nécessite une taille de maille suffisamment petite pour que les hypothèses de la couche limite tiennent, cela reste bien en deçà de ce qui est nécessaire pour bien capturer une couche limite turbulente. Le bémol est que la valeur de y^+ n'est calculable qu'*a posteriori*; l'utilisateur doit donc effectuer sa simulation, vérifier que le y^+ soit au dessus de 30, ajuster la condition de raccordement et refaire la simulation dans le cas où la condition n'est pas respectée. De plus, il arrive souvent que localement dans le domaine, la valeur de y^+ passe sous la valeur de 30 et remonte un peu plus loin. Il devient alors difficile, voire parfois impossible, de satisfaire la condition de y^+ dans tout le domaine simultanément.

Pour pallier à ce défaut, des lois de paroi améliorées qui prennent en compte la zone visqueuse

(*viscous sublayer* sur la figure 1.1) ont été développées (Chmielewski and Gieras, 2013). Elles sont toutefois construites, comme leurs prédécesseurs, à partir des développements asymptotiques et ne sont donc pas exactes entre $y^+ \in [10, 30]$ et introduisent plutôt une fonction de pondération pour faire le lien entre les deux zones (*buffer layer*), ce qui n'est pas forcément cohérent avec les modèles de turbulence (Launder and Spalding, 1974). Particulièrement pour k , dont la dérivée normale est nulle dans la zone logarithmique et visqueuse, mais loin de l'être entre les deux zones, tel que le montre la figure 1.2. La seule condition à respecter devient donc $y^+ < 300$, ce qui est beaucoup moins restrictif. Malgré ces améliorations, les lois de paroi traditionnelles ont toujours mauvaise réputation face à des problèmes présentant des gradients de pression adverse. C'est ce qui motiva Kim et Choudhury, vers le milieu des années 90, à développer un nouveau type de lois de paroi sensibilisées au gradient de pression (Kim and Choudhury, 1995) à l'aide d'un terme *ad-hoc* ajouté aux équations standards et qui a permis une amélioration considérable des prédictions dans bon nombre de problèmes présentant des gradients de pressions, des décollements ou recollements de couche limite. Cette loi de paroi requiert cependant toujours un raccordement dans la zone logarithmique (Gharbi et al., 2010). Pour remédier à cela, mais surtout afin de proposer un modèle de lois de paroi qui soit consistant avec le modèle de turbulence auquel il est associé, plusieurs auteurs ont développé des lois de paroi dites consistantes, ou généralisées, qui sont consistantes avec le modèle de turbulence avec lequel elles sont utilisées (Knopp, 2006). Cette approche préconise de faire le moins d'hypothèses possibles ; on résout donc numériquement l'écoulement de Couette turbulent à l'aide d'un code d'éléments finis 1D résolvant les équations RANS couplées au modèle de turbulence approprié. Les lois de paroi sont alors construites à partir des résultats tabulés, ce qui a l'avantage d'être complètement consistant avec les modèles de turbulence et permet de prendre en compte les gradients de pression (Frazza et al., 2015).

De manière analogue, il est possible de développer le même type de loi de paroi pour quantifier le transfert de chaleur turbulent en fonction de y^+ . En effet, on montre facilement que dans la couche limite, le terme de convection thermique est faible et que l'équation de transport de l'énergie en régime turbulent peut se réduire à ceci.

$$0 = \frac{d}{dy} \left[(\lambda + \lambda_t) \frac{dT}{dy} \right] \quad (1.25)$$

En intégrant selon la direction normale y , on arrive à une équation similaire à l'équation 1.14.

$$q_w = -(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (1.26)$$

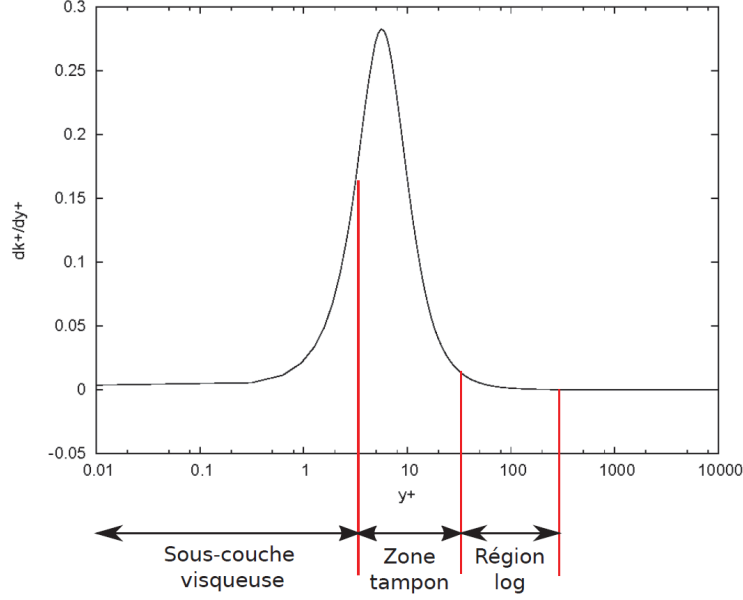


Figure 1.2 $\frac{\partial k^+}{\partial y^+}$ pour un écoulement de Couette sans gradient de pression

où q_w , cette fois-ci, représente le transfert de chaleur à la paroi. À l'instar de ce qui a été fait pour l'équation du mouvement, on utilise les définitions suivantes :

$$Pr_t = \frac{c_p \nu}{\lambda_t} \quad (1.27)$$

$$T^+ = \frac{(T_w - T) u_\tau c_p}{q_w} \quad (1.28)$$

Ce qui nous permet d'arriver à l'équation sans dimension suivante :

$$1 = \left(Pr^{-1} + Pr_t^{-1} \right) \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \quad (1.29)$$

Dans la sous-couche visqueuse, l'écoulement devient laminaire et le terme de conduction thermique prend le dessus sur le terme de conduction thermique turbulent $Pr_t \rightarrow 0$, de sorte qu'il devient alors possible d'intégrer l'équation 1.29 pour arriver à ceci.

$$T^+ = y^+ Pr \quad (1.30)$$

En revanche, pour la zone logarithmique, on arrive à

$$T^+ = \frac{Pr_t}{\kappa} \log(y^+) + \beta(Pr) \quad (1.31)$$

Cette formulation a cependant ses limites, car le transfert de chaleur à la paroi q_w est fonction de la vitesse de frottement u_τ . Or, $u_\tau = 0$ lorsque la vitesse tangentielle s'annule. Dans bien des cas, cela ne pose pas de problème. Par contre si on traite d'un problème comprenant des zones de stagnation, où $u_\tau = 0$, mais $q_w \neq 0$, l'estimation du transfert de chaleur y est fausse. Pour remédier à ce problème, on utilise une échelle de vitesse différente, qui ne se base plus sur la vitesse tangentielle mais sur l'énergie cinétique turbulente (u_k) (Arpaci and Larsen, 1984). En basant la vitesse de frottement sur l'énergie cinétique de la turbulence, on s'assure que dans les zones où il y a une grande production de turbulence, c'est-à-dire les zones de forts gradients de vitesse, le transfert de chaleur ne s'annule pas. La définition pour T^+ change alors légèrement.

$$T^+ = \frac{(T_w - T)u_\tau c_p}{q_w} \quad (1.32)$$

Par contre, au voisinage d'un point de stagnation, la vitesse de frottement tend à s'annuler ($u_\tau = 0$) alors que le transfert de chaleur q_w y atteint en réalité, un pic. Nous présenterons cependant une astuce simple permettant de contourner ce problème en ayant recours à une deuxième échelle de vitesse u_k , basée sur l'énergie cinétique de turbulence.

1.3 But et objectifs

À la lumière de ce qui précède, le but du présent travail est de proposer des lois de paroi consistantes qui soient consistantes avec le modèle de turbulence avec lequel elles sont utilisées tout en étant mieux adaptées aux problèmes de transfert de chaleur turbulent. Le modèle de turbulence privilégié sera le $k - \omega$ SST, en raison de ses bonnes performances sur des problèmes comportant de forts gradients de pression adverse. Celui-ci devra en outre être implémenté dans le code de simulation numérique assisté par ordinateur du Pr Dominique Pelletier, *CADYF*. Les objectifs spécifiques sont donc les suivants :

- Implémenter le modèle de turbulence $k - \omega$ SST dans le code de CFD par éléments-finis *CADYF*.
- Développer un code de simulation RANS 1D qui prenne en compte la température afin d'en déduire les lois de paroi ($u^+(y^+), k^+(y^+), \omega^+(y^+), T^+(y^+)$) consistantes avec le modèle de turbulence choisi.
- Formuler et implémenter les conditions limites associées aux lois de parois consistantes.

- Vérifier et valider l'implémentation à l'aide de la technique des solutions manufacturées.
- Démontrer la pertinence de ces conditions limites en l'appliquant à des problèmes d'intérêt pratique.

CHAPITRE 2 MODÈLE $k - \omega$ SST DE MENTER

Le modèle de turbulence $k - \omega$ *Shear Stress Transport* (*SST*) est un modèle particulièrement performant pour les écoulements présentant de forts gradients de pression ou des zones de stagnation. Il permet notamment de prédire adéquatement le point de recollement des couches limites soumises à des gradients de pression adverse. D’abord développé et optimisé pour les écoulements aérodynamiques (Menter, 1994), Menter croyait à l’époque (et avec raison) que son modèle trouverait sa place dans une foule d’autres types d’écoulements rencontrés en ingénierie, tels que l’hydrodynamique Naval, caractérisée par de grands nombres de Reynolds, (Tocci, 2016) et le transfert de chaleur en raison de ses performances dans les zones de stagnation (Sun, 2007). Son succès tient à son aptitude à rallier les forces des modèles $k - \epsilon$ et $k - \omega$, à savoir la capacité du premier à bien prédire les écoulements libres en réduisant la dépendance sur les conditions limites turbulentes et celle du deuxième pour les couches limites. C’est principalement pour ces raisons que ce modèle est l’un des plus utilisés actuellement, il en existe d’ailleurs plusieurs variantes ; *SST - V* (Menter, 1992), *SST - RC* (Smirnov and Menter, 2009), *SST - SUST* (Spalart and Rumsey, 2007), *SST - RC - Hellsten* (Mani et al., 2004). Le site de la NASA recense les principales variantes (NASA, 2015).

2.1 Modèle BSL de 1994

Le premier modèle implémenté, est la version *Baseline* (BSL) de 1994 de Menter (Menter, 1994). Lorsqu’on y fera référence dans les prochaines sections, on référera au modèle *BSL*. Ce modèle est à l’origine du modèle *Shear Stress Transport* (*SST*) et est très similaire dans son implémentation, seule une constante et la définition de μ_T diffèrent. Le principe général derrière le modèle est simple, on estime à partir des caractéristiques de l’écoulement (distance paroi, k , ω , viscosité, etc.) si on se trouve dans la couche limite ou dans la zone libre. On appliquera alors, à l’aide d’une fonction de pondération appropriée, le modèle $k - \epsilon$ standard exprimé sous une forme $k - \omega$ si on se trouve dans la zone libre, le modèle $k - \omega$ de Wilcox si on est dans la couche limite, et une combinaison linéaire des deux si on se trouve à mi-chemin.

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = P_k - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho \bar{u}_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = P_\omega - \beta^* \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega^2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (2.2)$$

Avec les définitions suivantes

$$P_k = \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad \tau_{ij} = 2\mu_t S_{ij} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad (2.3)$$

Le terme de production $\tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$ s'explicite de la manière suivante.

$$P_k = \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (2.4)$$

avec

$$\tau_{ij} = 2\mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5)$$

en 2D, il se simplifie à

$$P_k = \mu_t \left[2 \left(\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.6)$$

Avec

$$F_1 = \tanh(arg_1^4) \quad arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega} \right), \frac{4\rho \sigma_{\omega} k}{CD_{k\omega} d^2} \right] \quad (2.7)$$

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\rho \sigma_{\omega} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right)$$

Menter suggère d'utiliser $P_k = \min(P_k, 20\beta^* \omega k)$ comme limiteur pour le terme de production dans l'équation de k seulement (Menter, 1994). Il a plus tard proposé pour son modèle *SST* d'appliquer le limiteur aux deux équations et l'a modifié pour $P_k = \min(P_k, 10\beta^* \omega k)$ et $P_{\omega} = \frac{\gamma}{\nu_T} P_k$ (Menter et al., 2003). Pour son implémentation dans Cadyf, la dernière proposition a été privilégiée pour le modèle *BSL*, car elle avait l'avantage de faciliter la stabilité numérique tout en donnant des résultats similaires. Le recours aux fonctions min/max dans les équations 2.7 pourrait mener à une dégradation du taux de convergence. En effet, la plupart des schémas de résolution numérique requièrent le calcul des gradients de la solution et l'introduction de fonctions min/max dans la définition de certains termes induit des discontinuités qui compliquent le calcul analytique des gradients.

Les constantes numériques pour le modèle *BSL* et *SST* sont calculées comme suit (Menter et al., 2003) :

$$\phi^{BSL/SST} = F_1 \phi^{k-\omega} + (1 - F_1) \phi^{k-\epsilon} \quad (2.8)$$

$$\kappa = 0.41 \quad \beta^* = 0.09 \quad a_1 = 0.31 \quad (2.9)$$

$$\gamma^{k-\omega} = 5/9 \quad \sigma_k^{k-\omega} = 0.5 \quad \sigma_\omega^{k-\omega} = 0.500 \quad \beta^{k-\omega} = 0.0750 \quad (2.10)$$

$$\gamma^{k-\epsilon} = 0.44 \quad \sigma_k^{k-\epsilon} = 1.0 \quad \sigma_\omega^{k-\epsilon} = 0.856 \quad \beta^{k-\epsilon} = 0.0828 \quad (2.11)$$

2.2 Modèle SST standard de 2003

La définition de la viscosité turbulente est l'unique différence entre les modèles *Baseline* et *SST* de Menter. Cette modification dans le calcul de μ_t a été introduite pour pallier à la tendance erronée qu'ont la plupart des modèles de turbulence à deux équations, le modèle *BSL* n'y échappant pas, de sous-estimer la séparation de la couche limite dans les écoulements à fort gradient de pression. Il a aussi l'avantage de limiter la production de turbulence et de réduire le cisaillement pariétal dans les zones où les contraintes normales sont grandes, par exemple, au voisinage de points de stagnation.

$$\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)} \quad (2.12)$$

$$F_2 = \tanh(arg_2^2) \quad arg_2 = \max \left(2 \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega} \right) \quad (2.13)$$

L'introduction de cette modification s'est faite à la suite du succès du modèle de turbulence de Jonhson-King pour la prédiction des écoulements fortement séparés. Le modèle Jonhson-King est basé sur l'hypothèse de Bradshaw selon laquelle les contraintes de cisaillement τ dans les couches limites sont proportionnelles à l'énergie cinétique turbulente k (Menter, 1994) :

$$\tau = \rho a_1 k \quad (2.14)$$

Avec a_1 est une constante de proportionnalité

Or, dans la plupart des modèles de turbulence à 2 équations, le cisaillement est plutôt défini en fonction de la norme de la vorticité Ω :

$$\tau = \mu_T \Omega \quad (2.15)$$

avec

$$\Omega = \sqrt{2W_{ij}W_{ij}} \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.16)$$

ce qui revient physiquement à

$$\tau = \rho \sqrt{\frac{Production_k}{Dissipation_k}} a_1 k \quad (2.17)$$

En pratique, si le gradient de pression est faible, il y a équilibre entre la production et la dissipation de k et les équations 2.14 et 2.15 deviennent équivalentes. En revanche, en présence d'un gradient de pression adverse non-négligeable, ce ratio devient rapidement très grand et l'hypothèse ne tient plus. Ainsi, la plupart des modèles de turbulence à deux équations, y compris le $k - \omega$ BSL, surestiment le terme τ , ce qui a pour effet de faire recoller les couches limites prématurément. Pour remédier à ce problème, Menter a initialement proposé le changement suivant :

$$\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\Omega} \quad (2.18)$$

De cette manière, il s'assure d'imposer l'hypothèse de Bradshaw dans la couche limite. Cependant, comme l'hypothèse ne tient plus la route à l'extérieur de la couche limite, Menter introduisit une fonction de pondération F_2 afin de faire le lien entre les deux zones.

$$\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)} \quad (2.19)$$

Puis, proposa finalement en 2003 la définition suivante (Menter et al., 2003) :

$$\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega, S F_2)} \quad (2.20)$$

avec

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.21)$$

L'hypothèse de Bradshaw nécessite que la fonction de pondération F_2 soit égale à 1 dans la totalité de la couche limite et zéro aussitôt qu'on en sort. La fonction de pondération F_1 , quant à elle, a été développée de manière à tirer profit du modèle de Wilcox dans la couche

limite, tout en s'affranchissant de ses problèmes de dépendance sur les conditions limites de k et ω dans l'écoulement libre. Ainsi, afin de s'assurer que F_1 soit réellement nulle dans les zones de cisaillement libre, Menter a choisi la prudence en faisant chuter F_1 prématurément, c'est-à-dire légèrement avant la fin de la couche limite. En revanche, comme cette prudence n'était pas nécessaire pour la deuxième fonction de pondération, F_2 , sa définition est légèrement différente de celle de F_1 et devient nulle un peu au delà de la couche limite.

2.2.1 Formulation adimensionnelle

La formulation adimensionnelle des équations de turbulence permet de mieux mettre en évidence la physique et l'impact des paramètres sur chacun des termes des équations. Il devient par exemple plus facile de *voir* quels termes deviennent dominants lorsque le nombre de Reynolds augmente. De plus, elle permet également de réduire la raideur numérique du système à résoudre puisqu'en choisissant les variables de références adéquates, il est possible d'amener toutes les variables résolues (\bar{u} , \bar{v} , \bar{P} , \bar{T} , k , ω) à un ordre de grandeur similaire. Pour ce faire, nous débutons avec les équations 2.1 et 2.2.

$$\rho \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \quad (2.22)$$

$$\rho \bar{u}_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = P_\omega - \beta^* \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega^2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (2.23)$$

On propose ensuite de rendre les variables sans dimension de la manière suivante.

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_r} \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_r} \quad \tilde{\mu}_t = \frac{\mu_t}{\mu_{tr}} \quad (2.24)$$

$$\tilde{u}_i = \frac{\bar{u}_i}{u_r} \quad \tilde{k} = \frac{k}{u_r^2} \quad \tilde{\omega} = \frac{L_r}{u_r} \omega \quad (2.25)$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma_r} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \frac{x_i}{L_r}} = L_r \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \tilde{\tau}_{ij} = \frac{u_r \mu_{tr}}{L_r} \tau_{ij} \quad (2.26)$$

En réarrangeant les termes, on aboutit à ceci :

$$\boxed{\tilde{\rho} \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{x}_i} = \tilde{P}_k - \beta^* \tilde{\rho} \tilde{\omega} \tilde{k} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left[\left(\frac{\tilde{\mu}}{Re} + \sigma_k \frac{\tilde{\mu}_t}{Re_t} \right) \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{x}_i} \right]} \quad (2.27)$$

$$\boxed{\tilde{\rho} \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{x}_i} = \gamma_r Re_t \tilde{P}_k - \beta^* \tilde{\rho} \tilde{\omega}^2 + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left[\left(\frac{\tilde{\mu}}{Re} + \sigma_\omega \frac{\tilde{\mu}_t}{Re_t} \right) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{x}_i} \right] + 2(1 - F_1) \tilde{\rho} \sigma_{\omega^2} \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{x}_i}} \quad (2.28)$$

Avec

$$\tilde{P}_k = \min \left(\left[\frac{1}{Re_t} \right] \tilde{\tau}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i}, 10 \beta^* \tilde{\omega} \tilde{\rho} \tilde{k} \right) \quad (2.29)$$

En pratique, le modèle $k - \omega$ SST est très peu sensible aux conditions limites sur les variables de turbulence dans l'écoulement libre parce qu'il est basé sur le modèle $k - \epsilon$ loin des parois et que ce dernier est justement réputé pour sa faible sensibilité face à ces paramètres. La sensibilité de la solution à Re_t devrait donc être faible.

2.2.2 Formulation logarithmique

La formulation logarithmique, telle que proposée par (Frazza et al., 2015), a l'avantage de garantir la positivité des variables de turbulence tout au long de la résolution numérique. Dans le cadre d'une résolution numérique tout couplée par la méthode de Newton-Raphson, il n'est pas rare de voir les variables k et ω passer sous 0 momentanément lors d'une ou deux itérations. Ceci a souvent pour effet de dénaturer les équations et mène la plupart du temps à la divergence numérique. Le recours à la formulation logarithmique permet de contourner le problème. Le développement des équations commence par le changement de variable suivant

$$K = \ln(k) \quad (2.30)$$

$$W = \ln(\omega) \quad (2.31)$$

On a alors les propriétés suivantes

$$e^K = k \quad (2.32)$$

$$e^K \frac{\partial K}{\partial x_i} = \frac{\partial k}{\partial x_i} \quad (2.33)$$

$$e^K \left(\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.34)$$

En substituant ces équations dans les équations de k et de ω , on arrive à

$$e^K \left(\rho \frac{\partial K}{\partial t} + \rho \bar{u}_i \frac{\partial K}{\partial x_i} \right) = \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho e^W e^K + e^K \left(\frac{\partial \sigma_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu_t}{\partial x_i} \right) \frac{\partial K}{\partial x_i} + (\mu + \sigma_k \mu_t) e^K \left(\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) \quad (2.35)$$

$$e^W \left(\rho \frac{\partial W}{\partial t} + \rho \bar{u}_i \frac{\partial W}{\partial x_i} \right) = \frac{\gamma}{\nu_t} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta \rho e^{2W} + e^W \left(\frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu_t}{\partial x_i} \right) \frac{\partial W}{\partial x_i} + (\mu + \sigma_\omega \mu_t) e^W \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{\partial W}{\partial x_j} \right) + 2\rho(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} e^K \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial W}{\partial x_j} \quad (2.36)$$

2.3 Équations RANS 1D dans la couche limite

Tel que nous l'avons mentionné plus tôt, le modèle $k - \omega$ SST est intégrable jusqu'à la paroi, il est donc compatible avec les lois de paroi consistantes. Or, l'approche que nous préconisons nécessite la tabulation préalable des profils de u^+ , k^+ , ω^+ et T^+ dans la couche limite. Pour ce faire, nous avons modifié *CL1D*, un outil particulièrement efficace qui fait la résolution numérique jusqu'à la paroi des équations RANS en 1D pour divers modèles de turbulence, afin d'inclure la résolution de l'équation de la température. Basé sur la technique des éléments finis, *CL1D* résout les équations RANS 1D sous leur forme dimensionnelle dans la couche limite, puis les rend sans dimension afin de produire les tables requises. Si nous reprenons l'exemple du modèle $k - \omega$ SST, les équations se simplifient à ce qui suit en une dimension.

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \\ 0 &= \mu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial y} \right] \\ 0 &= \rho \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \beta^* \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] + 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.37)$$

avec λ , la conductivité thermique et λ_t , la conductivité thermique turbulente.

$$\lambda_t = \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \quad (2.38)$$

La résolution du système d'équations 2.37 est effectuée de manière itérative à l'aide de la méthode de Newton. Les équations sont donc résolues en formulation tout-couplée. Nous traiterons dans la prochaine section de la méthode des éléments finis et des algorithmes de résolution couplé et semi-couplé. Nous nous contenterons donc de montrer les résultats obtenus à l'aide de *CL1D*. Les tables ont été adimensionnalisées à l'aide des définitions suivantes.

$$u_\tau = \sqrt{\nu \frac{\partial u}{\partial y}} \quad q_w = -(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y} \quad u^+ = \frac{u}{u_\tau}$$

$$k^+ = \frac{k}{u_\tau^2} \quad \omega^+ = \frac{\omega \nu}{u_\tau^2} \quad T^+ = \frac{(T_w - T) u_\tau c_p}{q_w}$$

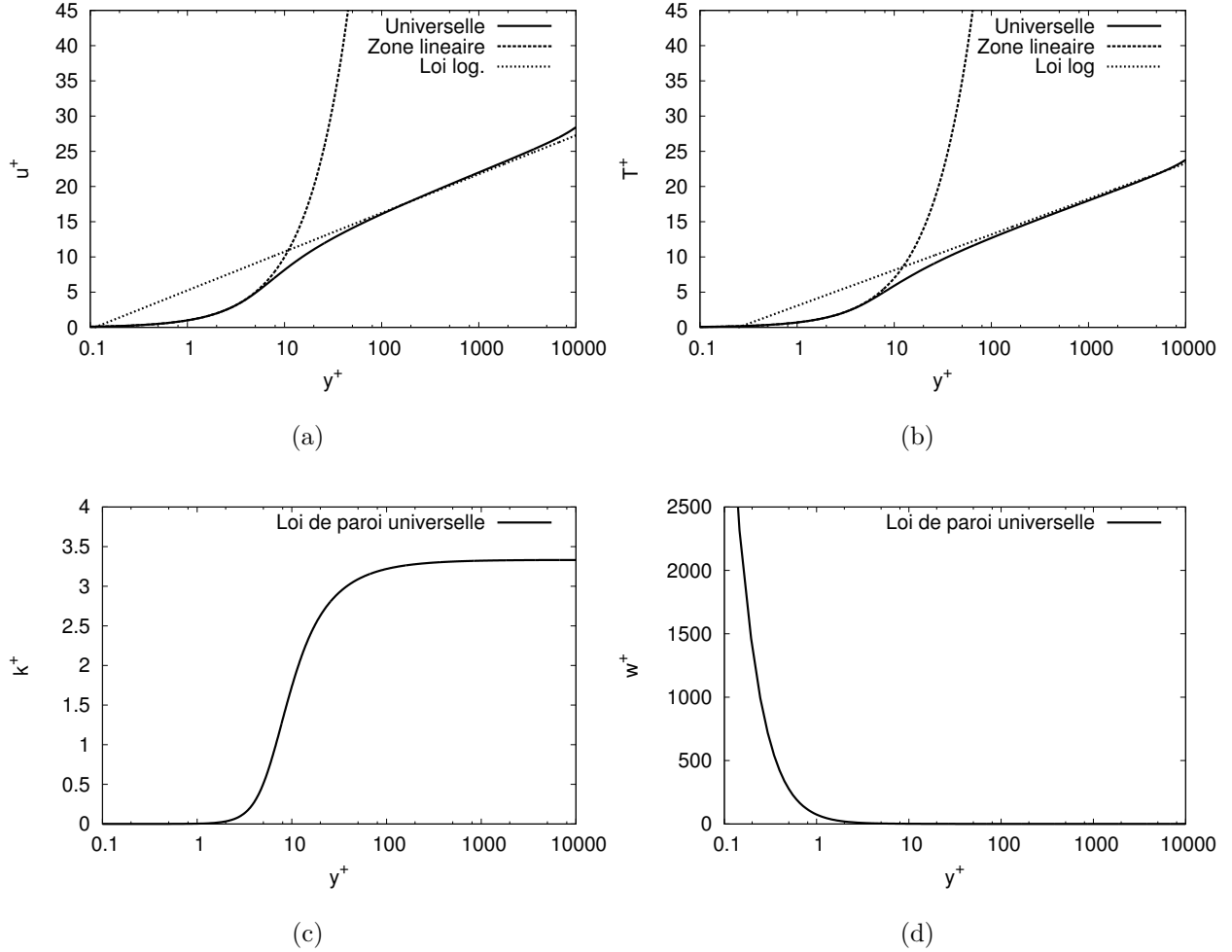


Figure 2.1 Tabulation de u^+ (a), T^+ (b), k^+ (c), et ω^+ (d) dans la couche limite

La figure 2.1 montre les différents profils de u^+ , k^+ , ω^+ et T^+ dans la couche limite sous les hypothèses d'un écoulement de Couette. Les profils de u^+ et T^+ sont très similaires à ceux des lois de paroi standard, excepté dans la zone tampon où l'écart atteint jusqu'à 30% pour les deux courbes. En ce qui concerne l'énergie cinétique turbulente, on constate encore une fois que la dérivée de k^+ par rapport à y^+ s'annule dans les zones linéaire et logarithmique mais atteint un pic dans la zone tampon. Pour ce qui est du taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence, on remarque que $\lim_{y^+ \rightarrow 0} \omega(y^+) = \infty$. D'un point de vue numérique, cela peut sembler problématique pour l'application des lois de paroi consistantes. Toutefois, en pratique, même lorsque l'on utilise le modèle en intégrant jusqu'à la paroi (donc sans lois de paroi), il est impossible de raccorder à $y^+ = 0$ et on applique plutôt une condition limite sur ω qui dépend de la taille de la première maille Δd (voir 2.39 (Menter, 1994)) et qui correspond à un raccordement profond dans la sous couche visqueuse à $y^+ < 2.5$ (Schmitt, 2007).

$$\omega_{wall} = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 \Delta d^2} \quad (2.39)$$

En général, lorsqu'on utilise des lois de paroi, on vise un raccord à $y^+ \approx 30$ pour éviter d'avoir à mailler la sous-couche visqueuse, le problème ne se pose donc pas. Par contre, si on souhaite utiliser les lois de paroi consistantes à la manière d'un modèle bas-Reynolds et intégrer profondément dans la couche limite, il faudra éviter de poser une distance de raccord trop basse.

Finalement, les équations ont été développées sous leurs formes dimensionnelle et adimensionnelle, en formulation standard et logarithmique, mais encore faut-il les résoudre. L'approche privilégiée par le Pr Pelletier dans son code de CFD est l'analyse par éléments-finis. La prochaine section traitera donc des aspects numériques liés à la résolution des équations, du traitement des conditions limites d'un point de vue algorithmique et de l'implémentation du modèle.

CHAPITRE 3 CONSIDÉRATIONS NUMÉRIQUES

3.1 Éléments-finis

En toute généralité, la méthode des éléments-finis consiste à subdiviser le domaine étudié en éléments pour ensuite déterminer une solution numérique u_h qui satisfasse, au sens élémentaire, les équations aux dérivées partielles que l'on souhaite résoudre. Il existe dans la littérature plusieurs façons d'optimiser u_h . On pourrait par exemple aborder le problème d'un point de vue minimisation d'une fonctionnelle ou encore prendre l'approche des résidus pondérés. En pratique, la méthode des résidus pondérés est beaucoup plus utilisée car elle est systématique et conduit toujours à une formulation variationnelle du problème, ce qui n'est pas toujours le cas pour l'approche variationnelle. Typiquement, cette technique utilise la méthode de *Galerkin* pour minimiser le résidu de l'équation aux dérivées partielles à résoudre, il s'agit d'un critère d'optimisation qui a largement fait ses preuves et qui fera l'objet de la prochaine sous-section.

3.1.1 Formulation faible

Prenons comme exemple l'équation de l'énergie cinétique turbulente k en formulation standard.

$$\rho \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \quad (3.1)$$

On applique la première étape de la méthode de Galerkin en multipliant cette équation par une fonction poids ϕ appropriée et en intégrant sur le domaine Ω . Typiquement, dans la méthode de Galerkin, on choisit une fonction poids ϕ égale aux fonctions d'interpolation des éléments. En règle générale, on choisit un polynôme de degré k pour la vitesse et un polynôme de degré $k - 1$ pour la pression. Dans *Cadyf*, on utilise généralement des éléments de type P1-P2 (Pelletier, 2016). Quadratique en vitesse et linéaire en pression.

$$\int_{\Omega} \left(\rho \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} \phi \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \phi - \beta^* \rho \omega k \phi + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \phi \right) d\Omega \quad (3.2)$$

Dans la méthode des éléments finis, les variables de la solution exacte sont approximées par des polynômes de degré fini (la plupart du temps de degré 2, mais plusieurs codes de calcul de haut niveau utilisent des polynôme de degrés supérieurs). Dans le cadre du projet, on utilise des polynôme d'interpolation d'ordre 2 pour les variables de la turbulence ; les

dérivées secondes sont donc approximées par des constantes. Ce qui peut causer certaines difficultés numériques lors de l'intégration. On choisira donc d'intégrer par partie les termes comportant des dérivées d'ordre 2 ou supérieur. Dans le cas présent, seul le terme de diffusion de k sera intégré par partie.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\rho \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} \phi \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \left(\tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k \right) \phi d\Omega - \int_{\Omega} \left((\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left((\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \phi \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.3)$$

En utilisant le théorème de divergence, on transforme le dernier terme en intégrale de frontière.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\rho \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} \phi \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \left(\tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \phi - \beta^* \rho \omega k \phi \right) d\Omega - \int_{\Omega} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_D \cup \Gamma_N} \phi \left((\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (3.4)$$

En rapportant tous les termes à gauche de l'équation, on obtient alors la **formulation faible** suivante (sur Ω).

$$\boxed{R_k = \int_{\Omega} \left(\rho \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} - \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \beta^* \rho \omega k \right) \phi d\Omega + \int_{\Omega} \left((\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega} \quad (3.5)$$

avec la condition naturelle suivante (sur Γ_N)

$$\boxed{t = (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} n_i = 0} \quad (3.6)$$

De manière similaire pour l'équation de ω , on arrive à

$$\boxed{R_{\omega} = \int_{\Omega} \left(\rho \bar{u}_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} - \frac{\gamma}{\nu_t} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \beta \rho \omega^2 - 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) \phi d\Omega - \int_{\Omega} \left[(\mu + \sigma_{\omega} \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega} \quad (3.7)$$

avec la condition naturelle suivante (sur Γ_N)

$$\boxed{t = (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} n_i = 0} \quad (3.8)$$

En règle générale, on choisit les mêmes fonctions d'interpolation pour k et ω , mais rien n'empêche d'en choisir une différente pour chaque équation. Cette formulation a l'avantage d'être bien posée et consistante ($\lim_{h \rightarrow 0} |u - u_h|^{p,p} \stackrel{p,p}{=} 0$). Elle n'est toutefois pas bien adaptée à tous les problèmes turbulents qui sont généralement raides numériquement. On lui préfère plutôt une version stabilisée dérivée de la formulation de *Galerkin* et qui fait justement l'objet de la prochaine section.

3.1.2 Stabilisation SU/SUPG

La formulation SUPG (*Streamline Upwind Petrov Galerkin*) a initialement été proposée par Brooks et Hughes (Brooks and Hughes, 1982), en 1982. Le but est de s'affranchir des problèmes d'oscillation de u_h en injectant une viscosité artificielle dans le système à résoudre (Ninokata et al., 2002). Cette correction est appliquée à travers les fonctions d'interpolation qu'on choisit alors décentrées en aval de l'écoulement. Dans le cadre du projet, nous privilégierons l'approche de (Tezduyar et al., 2002) pour le développement des équations.

La première étape vise à définir de nouvelles fonctions d'interpolation décentrées que nous noterons ϕ^* .

$$\phi^* = \phi + \tau_{supg} u \cdot \nabla \phi \quad (3.9)$$

Si on remplace 3.9 dans les équations 3.5, 3.7, on arrive aux équations suivantes pour les résidus stabilisés de k et de ω .

$$R_k^* = \int_{\Omega} \left(\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} - \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \beta^* \rho \omega k \right) \phi^* d\Omega + \int_{\Omega} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} d\Omega \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} R_\omega^* = & \int_{\Omega} \left(\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho \bar{u}_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} - \frac{\gamma}{\nu_t} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \beta \rho \omega^2 \omega - 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) \phi^* d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} d\Omega \end{aligned} \quad (3.11)$$

Or, il est possible de séparer la contribution de ϕ et de $\tau_{supg} u \cdot \nabla \phi$ afin de ré-écrire les équations 3.10 et 3.11 sous une forme plus pratique. On remarque alors que la stabilisation des équations s'exprime par l'ajout d'un seul terme pour chaque équation ($N_k(R_k)$ et $N_\omega(R_\omega)$).

$$R_k^* = \int_{\Omega} \left(\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} - \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \beta^* \rho \omega k \right) \phi d\Omega + \int_{\Omega} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega + N_k \quad (3.12)$$

$$R^*_\omega = \int_\Omega \left(\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho \bar{u}_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} - \frac{\gamma}{\nu_t} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \beta \rho \omega^2 \omega - 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) \phi d\Omega \quad (3.13)$$

$$- \int_\Omega \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega + N_\omega$$

avec

$$N_k = \int_\Omega (\tau u \cdot \nabla \phi) \left(\rho \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} - \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \beta^* \rho \omega k - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \right) d\Omega \quad (3.14)$$

$$N_\omega = \int_\Omega (\tau u \cdot \nabla \phi) \left(\rho \bar{u}_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} - \frac{\gamma}{\nu_t} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \beta \rho \omega^2 \omega - 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right. \quad (3.15)$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] \right) d\Omega$$

À partir de ce point-ci, il existe plusieurs déclinaisons pour définir τ_{supg} . L'optimisation de ce paramètre fait encore l'objet de recherche soutenue. Dans le cadre du projet, nous nous fierons à celle de Tezduyar (Tezduyar et al., 2002).

$$\tau_{supg} = \left(\frac{4||u||^2}{h_{ugn}} + \frac{4\nu}{h_{ugn}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

avec

$$h_{ugn} = \frac{2||u||}{|u \cdot \nabla \phi|} \quad (3.17)$$

Cette formulation a l'avantage de s'adapter à chaque élément et à chaque situation ; τ_{supg} s'adapte à l'échelle de chaque élément, en fonction du terme dominant (convection, diffusion ou instationnaire). On remarquera que le décentrement des fonctions tests dans la formulation SUPG telle que développée par (Brooks and Hughes, 1982) est effectué sur le résidu au complet, et donc sur chaque terme de l'équation à résoudre. Ceci permet de conserver l'ordre de convergence de la méthode de résolution numérique.

Lorsqu'on utilise la formulation SU (*Stabilized Upwind*), on applique le décentrement uniquement sur le terme de convection, ce qui est l'équivalent d'ajouter une viscosité artificielle au système seulement le long des lignes de courant (Donea and Huerta, 2003). Cette méthode a toutefois le défaut de réduire l'ordre de convergence du schéma de résolution numérique et de

rendre la méthode inconsistante pour certains problèmes (le résidu ne tend pas vers 0 lorsque le maillage est raffiné). On pourrait alors se demander pourquoi utiliser la formulation SU, plutôt que SUPG ? En général, la formulation SUPG est beaucoup plus populaire, mais il peut arriver dans certaines situations que la définition de τ_{supg} soit mal posée, ce qui peut affecter la stabilité de la résolution.

Nous avons abordé les aspects de formulation faible et de stabilisation des équations de turbulence, toutefois, numériquement parlant, il reste beaucoup à voir. En ce sens, la prochaine sous-section traitera des conditions limites près des parois, mais surtout des différentes façons de les implémenter.

3.2 Condition de tangence

Contrairement aux modèles bas-Reynolds pour lesquels une simple condition de non glissement peut être imposée sur la vitesse, lorsqu'on utilise des lois de parois, on impose *grosso modo* la dérivée normale de la vitesse. La vitesse tangentielle n'est donc généralement pas nulle. La seule contrainte à satisfaire devient ainsi l'imperméabilité de la paroi solide. Lorsque les géométries sont simples et orientées avec le système d'axes, cela ne pose pas de problème, car il suffit d'imposer $u = 0$ ou $v = 0$, si les surfaces sont horizontales ou verticales. Toutefois, si on traite une frontière courbe ou qui n'est pas alignée avec le système d'axes, les choses se compliquent. Bien qu'il soit en théorie toujours possible d'imposer la condition de tangence sous une forme forte à l'aide d'un changement de repère au niveau élémentaire, la plupart du temps, on opte pour une méthode de pénalisation ou mixte qui sont beaucoup plus simples à mettre en oeuvre.

3.2.1 Méthode de pénalisation

Dans le code *Cadyf*, la condition de tangence à la paroi est implémentée à l'aide d'une formulation pénalisée. Cette façon de faire a l'avantage d'être relativement simple à mettre en place dans un code d'éléments finis. Pour certains problèmes ayant des frontières complexes cependant, elle peut mener à une dégradation du taux de convergence lorsque le maillage est raffiné (Stokes and Carey, 2011).

3.3 Lois de paroi

Traditionnellement, les lois de paroi sont implémentées selon la définition de Launder (Launder and Spalding, 1974), c'est-à-dire en basant le cisaillement imposé à la paroi sur une seule échelle de vitesse u_τ et en utilisant des développements asymptotiques (les lois de paroi standard). Il en existe cependant bien d'autres. En ce sens, la section qui suit décrit les principales approches utilisées pour l'implémentation des lois de paroi standard et consistantes à une et deux échelles de vitesse. Dans les lignes qui suivent l'indice EF réfère aux quantités qui ont été calculées par la méthode des *éléments finis* aux bords du domaine.

3.3.1 Lois de paroi standards à une échelle de vitesse

Généralement, les lois de paroi standard sont implémentées par zones ; un type de conditions limites lorsque y^+ est dans la zone linéaire et un autre lorsque y^+ est dans la zone logarithmique. Dans *Cadyf*, l'algorithme pour l'application des conditions limites pour le modèle $k - \omega$ va comme suit :

1. On initialise la solution à 0 ou on interpole d'un autre maillage, ce qui nous permet d'obtenir \bar{u}_{EF} sur les mailles adjacentes aux parois.
2. En supposant d'abord que y^+ se situe dans la sous-couche visqueuse, on calcule, à partir de \bar{u}_{EF} et de l'équation 1.18, le u_τ correspondant.
3. On vérifie que $y^+ = yu_\tau/\nu$ se trouve bel et bien dans la zone visqueuse. Si oui, on applique les conditions limites suivantes (Kalitzin et al., 2005) :

$$(a) \quad k = u_\tau^2 k^+ = u_\tau^2 C_k (y^+)^{3.23} \text{ qui satisfait } k^+(0) = 0 \text{ et } \frac{\partial k}{\partial n} = 0$$

$$(b) \quad \omega = \frac{u_\tau \omega^+}{\nu} = \frac{6u_\tau}{\beta_1 \nu (y^+)^2}$$

$$(c) \quad \tau_w = -\rho u_\tau^2$$

$$(d) \quad \text{Non-pénétration } (\bar{u} \cdot \hat{n} = 0)$$

4. Si, au contraire, y^+ se trouve dans la zone logarithmique, on résout numériquement l'équation 1.21 afin de déterminer u_τ et on applique les conditions limites suivantes (Kalitzin et al., 2005)

$$(a) \quad \frac{\partial k}{\partial n} = 0 \text{ ou } k = \frac{u_\tau^2}{k^+} = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}$$

$$(b) \quad \omega = \frac{u_\tau^2 \omega^+}{\nu} = \frac{u_\tau^2}{\kappa \nu \sqrt{C_\mu} y^+}$$

$$(c) \quad \tau_w = -\rho u_\tau^2$$

$$(d) \quad \text{Non-pénétration } (\bar{u} \cdot \hat{n} = 0)$$

3.3.2 Lois de paroi consistantes à une et deux échelles de vitesse

Une autre approche qui est parfois utilisée, et qui gagne en popularité dans les codes de haute performance, est la tabulation des lois de paroi. Cette méthode, dite consistante, a l'avantage d'éliminer le traitement par zones, mais également d'être cohérente avec le modèle de turbulence avec lequel elle est utilisée, pourvu que y^+ soit dans la couche limite ($y^+ < 300$). Le principe est simple, on résout une version unidimensionnelle des équations RANS, on obtient une solution du type $u(y)$, $k(y)$, $\omega(y)$, et $T(y)$. À partir de là, on adimensionnalise ces quantités de manière à obtenir $y^+(u^+y^+)$ (ou $y^+(k^+(y^+)^2)$ à deux échelles), $u^+(y^+)$, $k^+(y^+)$, $\omega^+(y^+)$, et $T^+(y^+)$ (voir section 2.3.1). La solution est alors tabulée et stockée pour être utilisée ultérieurement dans le code d'éléments-finis. Ensuite, pour imposer le cisaillement et les conditions limites adéquates au bord du domaine, on utilise l'un des deux algorithmes suivants.

Modèle universel à une échelle de vitesse

1. On initialise la solution à 0 ou on interpole d'un autre maillage, ce qui nous permet d'obtenir \bar{u}_{EF} sur les mailles adjacentes aux parois.
2. On détermine y^+ à partir de ce que l'on connaît ; \bar{u}_{EF}, y, ν .
 - (a) On interpole $y_{LP}^+ = f(u^+y^+) = f(\frac{y\bar{u}_{EF}}{\nu})$
 - (b) On interpole le reste des variables à l'aide de y_{LP}^+ .
 - i. $u_{LP}^+ = f(y_{LP}^+)$
 - ii. $k_{LP}^+ = f(y_{LP}^+)$
 - iii. $\omega_{LP}^+ = f(y_{LP}^+)$
 - iv. $T_{LP}^+ = f(y_{LP}^+)$
 - v. $\frac{\partial k^+}{\partial y^+}_{LP} = f(y_{LP}^+)$
 - (c) On calcule $u_\tau = \frac{\bar{u}_{EF}}{u^+}$
3. On applique les conditions limites suivantes :
 - (a) $\frac{\partial k}{\partial \bar{n}} = \frac{u_\tau^3}{\nu} \frac{\partial k^+}{\partial y^+}$
 - (b) $\omega = \frac{\omega^+ u_\tau^2}{\nu}$
 - (c) $\tau_w = -\rho u_\tau^2$
 - (d) Non-pénétration ($\bar{u} \cdot \hat{n} = 0$)

Modèle universel à deux échelles de vitesse

Pour ce qui est de la loi de paroi à deux échelles de vitesse, la façon de procéder est pratiquement la même.

1. On initialise la solution à 0 ou on interpole d'un autre maillage, ce qui nous permet d'obtenir \bar{k}_{EF} sur les mailles adjacentes aux parois.
2. On détermine y^+ à partir de ce que l'on connaît ; k_{EF}, y, ν .
 - (a) On interpole $y_{LP}^+ = f(k^+ y^{+2}) = f(\frac{y^2 k_{EF}}{\nu^2})$
 - (b) On interpole le reste des variables à l'aide de y_{LP}^+ .
 - i. $u_{LP}^+ = f(y_{LP}^+)$
 - ii. $k_{LP}^+ = f(y_{LP}^+)$
 - iii. $\omega_{LP}^+ = f(y_{LP}^+)$
 - iv. $T_{LP}^+ = f(y_{LP}^+)$
 - v. $\frac{\partial k^+}{\partial y^+}_{LP} = f(y_{LP}^+)$
 - (c) On calcule $u_\tau = \frac{\bar{u}_{EF}}{u^+}$ et $u_k = \sqrt{\frac{k_{EF}}{k^+}}$
3. On applique ensuite la loi de paroi de la façon suivante :
 - (a) Pour ce qui est de la vitesse, on applique une contrainte de friction pariétale correspondant à $\tau_w = -\rho u_\tau u_k$. Ainsi qu'une condition de non pénétration $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$
 - (b) Pour k , on appliquera la condition de Neumann $\frac{\partial k}{\partial \bar{n}} = \frac{u_\tau^3}{\nu} \frac{\partial k^+}{\partial y^+}$
 - (c) Finalement, pour ω , on applique simplement la condition de Dirichlet $\omega = \frac{\omega^+ u_\tau^2}{\nu}$

3.4 Les différents algorithmes de calcul de la distance à la paroi

La distance à la paroi est une propriété relativement très utilisée dans les modèles de turbulence, on peut citer en exemples les modèles de Spalart-Allmaras, Menter, Secundov, Baldwin-Barth de même que plusieurs modèles hybrides LES-RANS. (Fares and Schröder, 2002). Son calcul peut sembler anodin, mais sur des maillages dépassant le million d'éléments cela devient vite très complexe. Typiquement, il existe 4 types d'algorithme (Roget and Sitaraman, 2013)

1. Recherche par arbre k-D (k-dimension)
2. Propagation d'onde
3. Avance couche par couche
4. Avance de sphères voxelisées

Dépendamment de l'architecture du code de CFD dans lequel on veut l'implémenter, de l'information disponible sur les parois et le type de géométries étudiées, le choix sera arrêté sur l'une ou l'autre de ces méthodes. Si une approximation plus ou moins précise de la distance paroi suffit, les algorithmes basés sur des équations différentielles suffisent généralement.

3.4.1 Recherche par arbre k-D

La première méthode se base sur les algorithmes de recherche du plus proche voisin. *Grosso modo*, on construit pour chaque point de la surface un arbre en ne conservant que les éléments qui respectent une condition donnée; ceux-ci doivent intersecter avec un cercle centré au point sondé. On augmente ensuite le rayon de manière à balayer tout le domaine. Cette méthode est extrêmement performante lorsque les éléments sont relativement près de la surface (Moore, 1990). En revanche, si ceux-ci sont très éloignés de la surface, plusieurs balayages seront nécessaires avant d'avoir couvert tous les points du domaine. On se retrouve donc avec un problème d'extensibilité; ses performances décroissent avec le nombre de points dans le domaine ainsi que leur disposition.

3.4.2 Propagation d'onde

La méthode de recherche de distance paroi par la technique de propagation d'onde se base généralement sur une équation différentielle de Poisson (elliptique), de Jacobi-Hamilton, ou encore de Eikonal (hyperbolique)(Fares and Schröder, 2002). On calcule la distance à la paroi à partir du temps nécessaire à une onde pour rejoindre la plus proche surface. Il faut donc résoudre un système d'équations temporelles sur tout le domaine. Or, comme le système est résolu numériquement, il faut réduire l'erreur jusqu'au zéro machine pour obtenir une erreur nulle. Ce type d'algorithme éprouve des difficultés pour les coins dont les angles sont très aigus. Il est possible de résoudre en ajoutant un terme de dissipation artificiel. Cependant, celui-ci ajoute une erreur au résultat. En mécanique des fluides, cette option est souvent retenue en raison de sa facilité d'implémentation dans le code de calcul. En effet, il ne s'agit en fait que de résoudre un système matriciel, ce que les codes de mécanique des fluides savent généralement faire très bien. De plus, dans bien des cas, la valeur *exacte* de la distance paroi n'est pas nécessaire, on peut souvent se contenter de réduire le résidu partiellement et ne pas se rendre au zéro machine.

3.4.3 Avance couche par couche

Les méthodes d'avance couche par couche utilisent un algorithme qui parcourt toutes les cellules en commençant par celles qui sont en contact avec la paroi ; on cherche ensuite la distance minimale à partir de celles des plus proches voisins de la couche inférieure. Ce genre de méthode a cependant le défaut de perdre en justesse lorsque la taille des mailles n'est pas uniforme. De plus, puisqu'on utilise toujours l'information de la couche inférieure pour calculer les distances à la paroi des mailles de la prochaine couche, une accumulation d'erreur peut être observée.

3.4.4 Avance de sphères voxelisées

Il existe d'autres types d'algorithmes, moins connus, mais qui n'ont pas ces défauts. Parmi ceux-ci, on peut noter celui de (Roget and Sitaraman, 2013) développé en 2013 dans le but de parer aux difficultés rencontrées par les algorithmes précédents. L'algorithme de voxelisation s'est avéré rapide, exact et extensible aux domaines comportant un grand nombre de points. De plus, il est possible de faire son implémentation en 2D, puis, de l'étendre au 3D sans trop modifier le code initial. Pour ces raisons, nous avons privilégié cette méthode pour le calcul de la distance à la paroi. On donne ici quelques détails de son implémentation.

Principe général

On commence par créer un maillage auxiliaire uniforme englobant la surface à étudier. C'est ce qu'on appelle la voxelisation du domaine. Ceci a pour effet de simplifier le problème en réduisant dans un premier temps le nombre de points à sonder tout en permettant de créer un repère en coordonnées entières, plus pratique pour la suite. Chaque élément du maillage auxiliaire contient l'information suivante : une variable logique qui indique si oui ou non l'élément contient des points de la surface, la liste de ces points le cas échéant et la position (x,y) du centroïde de l'élément. Ensuite, pour chaque point du domaine que l'on souhaite sonder, on construit autour de celui-ci, à l'aide du système de coordonnées entières, une sphère creuse (ou un cercle lorsqu'on travaille en 2D). On vérifie si l'un des voxels (pixel, en 2D) de la sphère contient un point de la paroi. Si oui, on calcule la distance avec la paroi pour tous les points contenus dans le voxel et on choisit la distance minimale. Si non, on agrandit le rayon de la sphère jusqu'à ce qu'il y ait «contact» avec un des voxels de la surface.

Optimisation de la méthode

Le principe général de la méthode a été expliqué, celle-ci n'est cependant pas implémentée telle quelle ; quelques optimisations doivent être faites pour qu'elle soit performante. Premièrement, puisque la surface est complètement contenue dans le maillage auxiliaire, il n'y a nul besoin de générer la sphère complète, mais seulement la partie comprise dans le maillage auxiliaire. De plus, il est possible de profiter des axes de symétrie de la sphère et de n'en tracer que le $1/48^e$ ($1/8^e$ en 2D). Deuxièmement, la taille des éléments du maillage auxiliaire (et celle du repère discret par le fait même) est sujette à optimisation. L'auteur de la technique propose la définition suivante.

$$\delta = l_{avg} \left[\min \left(1 + \frac{d_{avg} + d_{std}}{12l_{avg}}, 4 \right) \right] \quad (3.18)$$

où l_{avg} est la longueur caractéristique moyenne des éléments du maillage principal, tandis que d_{avg} et d_{std} sont la moyenne et l'écart-type de la distance entre le point sondé et la surface. Comme on ne connaît pas ces paramètres, on les estime à partir des coins du maillage auxiliaire. Pour ce qui est du rayon de recherche initial, le mieux est de choisir la distance minimale entre le point sondé et le maillage auxiliaire. Il est possible encore une fois d'estimer cette distance de la manière suivante.

$$R_{i0} = \sqrt{(i_c - i_0)^2 + (j_c - j_0)^2 + (k_c - k_0)^2} \quad (3.19)$$

où $i_c = \min(i_{max}, \max(1, i_q))$, $j_c = \min(j_{max}, \max(1, j_q))$, $k_c = \min(k_{max}, \max(1, k_q))$, avec (i_q, j_q, k_q) , la position discrète du point sondé.

Il existe plusieurs algorithmes de traçage de cercles ou sphères en coordonnées entières. Le plus connu, et celui qui est à la base de nombreuses autres méthodes, est l'algorithme de tracé d'arc de cercle de Bresenham (Bresenham, 1977). Cet algorithme a été un outil indispensable dans le domaine de l'affichage numérique. Il permet de tracer des cercles sur un écran d'affichage pixelisé (donc dans le domaine discret). Il n'est cependant pas possible de l'utiliser tel quel puisqu'il a le défaut de laisser des pixels vides lors du balayage de disque (voir ??). Une autre variante a plutôt été privilégiée, celle d'Andres (Andres, 1994). Celle-ci permet, en effet, de tracer plusieurs cercles concentriques sans laisser de case vide.

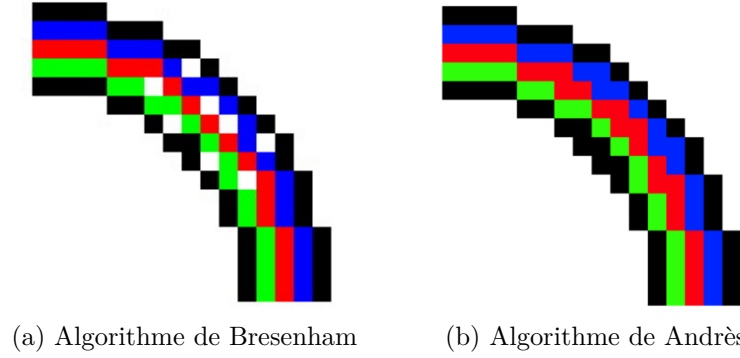


Figure 3.1 Comparaison des deux méthode de balayage de cercle discret. Copyright Pethrus, 2006. Reproduit avec permission (Pethrus, 2007)

Algorithme

De manière plus spécifique, en 2D, l'algorithme d'évaluation de la distance paroi se résume de la manière suivante.

1. Identification du type de paroi

1.1. Si la paroi est une droite, un cercle ou une parabole, on n'applique pas l'algorithme et on calcule simplement la distance entre chaque point et la courbe puisqu'elle est connue de manière analytique. Il s'agit de la méthode la plus rapide pour calculer la distance.

1.2. Autrement, on passe à l'étape suivante.

2. Définition du maillage auxiliaire

2.1. On définit un objet *AuxGrid*, pour le maillage auxiliaire qui contiendra les informations suivantes

2.1.1. *AuxGrid*%grid(:, :), qui contient les éléments de type voxel (voir (e))

2.1.2. *AuxGrid*%i_{min}, qui contiennent le nombre de voxel en X dans le domaine.

2.1.3. *AuxGrid*%j_{max}, qui contiennent le nombre de voxel en Y dans le domaine.

2.1.4. *AuxGrid*% , qui contient la taille des voxels.

2.1.5. *AuxGrid*%C(4), les coins de la boîte contenant la surface.

2.2. On définit la boîte qui encadre la surface. Pour ce faire on utilise les valeurs extrêmes de la surface.

2.2.1. $(X_{min}^{box}, X_{max}^{box}) = (0.9X_{min}^{surf}, 1.1X_{max}^{surf})$

2.2.2. $(Y_{min}^{box}, Y_{max}^{box}) = (0.9Y_{min}^{surf}, 1.1Y_{max}^{surf})$

- 2.3. On détermine la taille optimale δ pour les voxels du maillage auxiliaire.
 - 2.3.1. On calcule le point moyen du domaine $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\sum x_i}{N}, \frac{\sum y_i}{N} \right)$
 - 2.3.2. On calcule la longueur moyenne \bar{l} des arêtes de la surface.
 - 2.3.3. On calcule la taille optimale $\delta = \bar{l} * \min(1 + \frac{\bar{d} + \sigma_d}{\bar{l}}, 4)$, où \bar{d} et σ_d sont la distance moyenne entre le point moyen du domaine et les quatres coins de la boîte et son écart-type.
- 2.4. On génère le maillage en coordonnées entières (i, j)
 - 2.4.1. $i = \text{int} \left(\frac{x_i - X_{min}^{box}}{\delta} \right)$
 - 2.4.2. $j = \text{int} \left(\frac{y_j - Y_{min}^{box}}{\delta} \right)$
 - 2.4.3. L'origine du système d'axe (i, j) correspond au point inférieur gauche de la boîte et tous les points de la surface sont compris dans la boîte définie par $[0, i_{max}] \times [0, j_{max}]$. Avec $i_{max} = \text{int} \left(\frac{X_{max}^{box} - X_{min}^{box}}{\delta} \right)$ et $j_{max} = \text{int} \left(\frac{Y_{max}^{box} - Y_{min}^{box}}{\delta} \right)$.
- 2.5. Pour chaque élément du maillage auxiliaire, on définit un objet contenant les informations suivantes.
 - 2.5.1. Voxel%Surface, vrai si le voxel contient au moins un point de la surface.
 - 2.5.2. Voxel%NbPts, qui contient le nombre de points contenus dans le voxel.
 - 2.5.3. Voxel%List(x,y), la liste des points du domaine qui sont contenus dans ce voxel.
- 2.6. On fait ensuite une boucle sur les points de la surface pour associer l'information nécessaire à chaque voxel.

3. Calcul de la distance paroi pour un point donné (x_q, y_q)

- 3.1. On estime le rayon initial de recherche R_0 à l'aide de la distance minimale entre le point et les quatre côtés de la boîte.
- 3.2. On convertit les coordonnées du point sondé ainsi que le rayon initial de recherche en coordonnées entières (i_q, j_q) , i_R . Si le point se trouve dans la boîte, on prend $i_R = 1$
- 3.3. On utilise l'algorithme de traçage de cercle de Andrès (Andres, 1994) (voir figure 3.1) pour générer la liste des voxels (i_c, j_c) qui sont traversés par le cercle de rayon i_R , centré en (i_q, j_q) .
- 3.4. On vérifie si l'un d'eux contient un point de la surface

3.4.1. Si oui, on calcule la distance entre le point sondé (x_q, y_q) et tout ceux contenus dans le voxel. On prend la distance minimale. On reprend à l'étape 3.3 pour une dernière fois avec un rayon $i_R = i_R + 1$ afin de s'assurer que la distance est réellement minimale.

3.4.2. Sinon, on reprend à l'étape 3.3 avec un rayon $i_R = i_R + 1$.

L'algorithme précédent concerne le cas spécifique où il n'y a qu'une surface à traiter. Lorsqu'il y en a plusieurs, il est nécessaire de refaire en boucle l'algorithme pour chacune des surfaces. Il y a cependant la possibilité de s'arrêter juste après l'étape 2.2, en spécifiant que si la distance minimale entre le point sondé et la boîte est supérieure à la distance qu'on a déjà obtenue pour une autre surface, alors on stoppe et on conserve cette dernière.

Performance

Au niveau de la performance, l'auteur de la méthode (Roget and Sitaraman, 2013) affirme qu'en gardant le nombre de points sur la surface constant, le coût informatique de son algorithme augmente selon $O(N_d^{0.8}, N_s^{0.56})$, avec N_d , le nombre de points dans le domaine et N_s , le nombre de points sur les surfaces. Dans notre cas, il faut noter que l'algorithme implémenté n'est pas tout à fait identique à celui de l'auteur. En effet, dans la méthode originale, l'auteur oriente le maillage auxiliaire en fonction de l'orientation des parois ; pour des raisons de simplicité, nous avons choisi de laisser le repère du maillage auxiliaire aligné avec celui du domaine. De plus, nous estimons avec plus d'exactitude la distance à la paroi en effectuant une interpolation linéaire entre les pointes de la surface. Ceci était nécessaire afin de minimiser l'erreur dans les situations où le maillage était grossier. En ce sens, tel que l'on peut le voir sur la figure 3.3, le temps de coût informatique de l'algorithme tel que présenté dans le présent travail suit un ordre de $O(N_d^{0.982}, N_s^{1.75})$. Nous observons tout comme les auteurs de l'algorithme que l'ordre du coût informatique dépend du nombre de points dans le domaine et sur la surface, mais tend vers une valeur fixe à mesure que ceux-ci augmentent. Nous obtenons un ordre de complexité environ deux fois trop grand tant pour N_d que N_s . Plusieurs raisons peuvent expliquer cet écart, par exemple, la gestion de la mémoire, ou encore l'accès aux données (dans quel sens parcourt-on les matrices). En ce qui nous concerne, comme le temps de calcul demeurerait raisonnable (moins de 4 secondes pour un maillage uniforme de 800 000 noeuds), nous n'avons pas cherché à optimiser davantage l'algorithme.

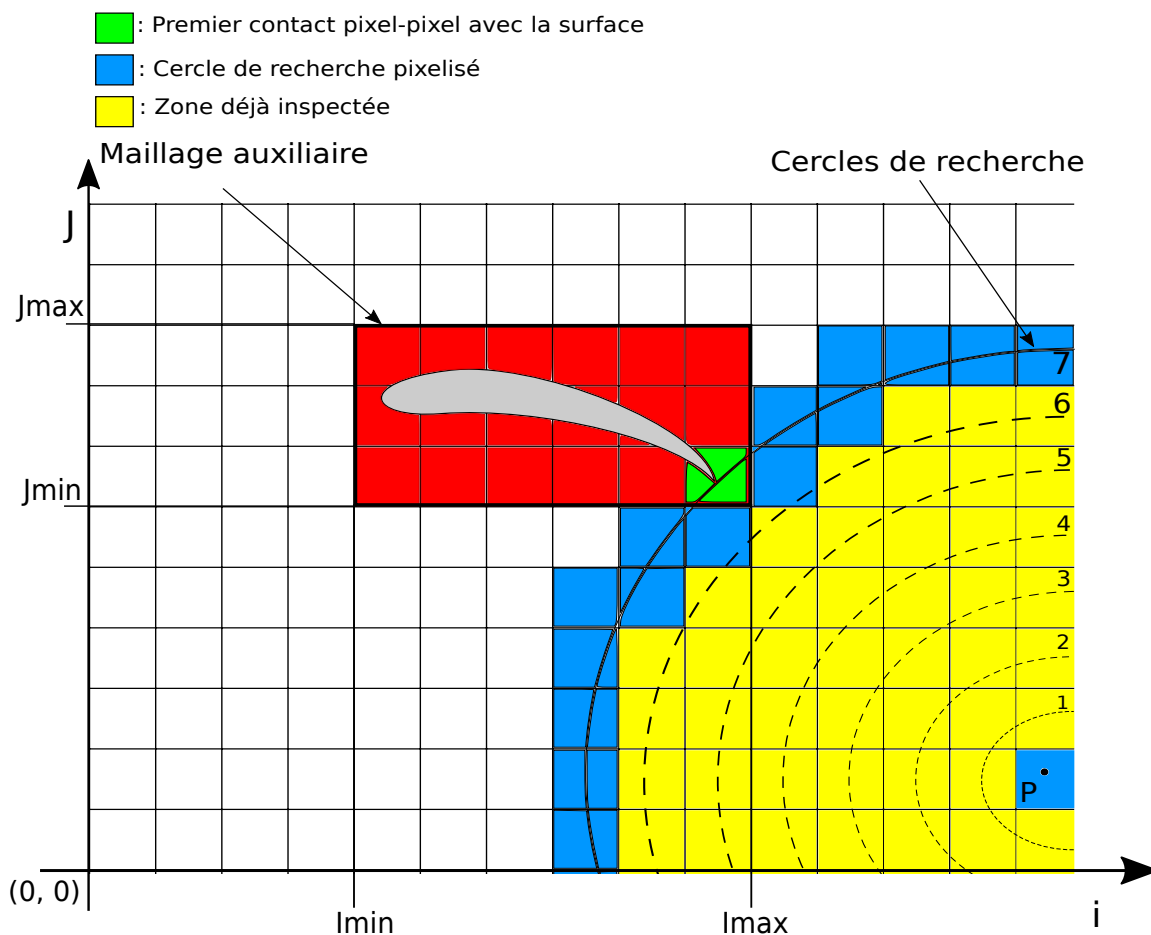


Figure 3.2 Le domaine est discrétisé et l'accès à ses éléments se fait de manière entière. Chaque élément est un objet contenant des informations spécifiques : Position discrète (i, j), indicateur surface (vrai/faux), liste des points contenus dans l'élément (x, y), nombre de points.

3.5 Couplage des équations

Il existe typiquement 2 approches pour résoudre les équations RANS en éléments-finis. La première et la plus populaire est l'approche **découplée**. Le découplage des équations se fait par le terme de viscosité turbulente μ_t . On calcule d'abord la viscosité turbulente initiale μ_t à l'aide des champs k et ω initiaux, puis, on résout les équations de continuité et de mouvement en effectuant une première itération de Newton. Ensuite, on passe aux équations de k et de ω qu'on résout de manière itérative en gardant le champ de vitesse constant, mais en ajustant la valeur de μ_t entre chaque itération. Lorsque les champs de k et ω sont convergés, on passe

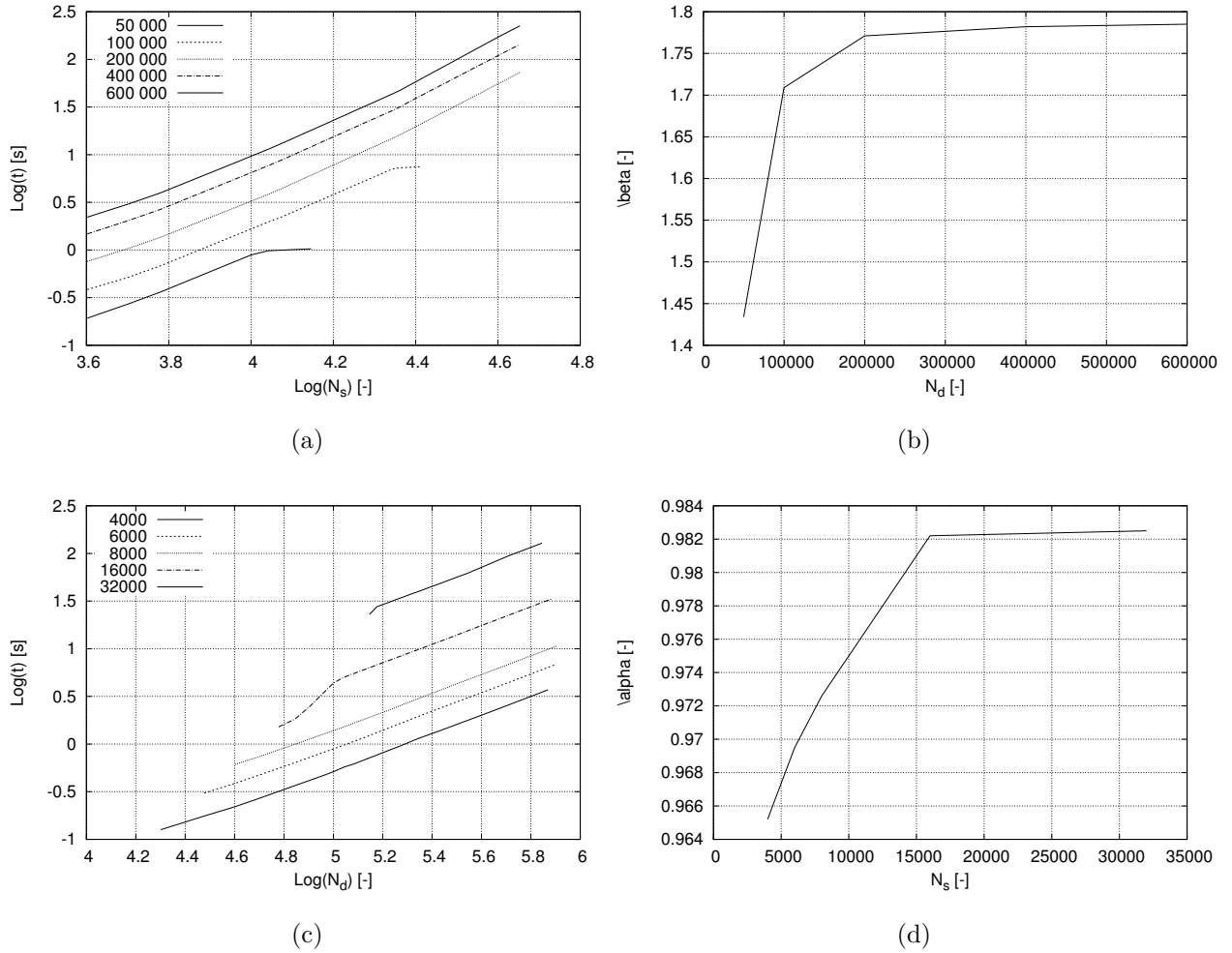


Figure 3.3 (a) Temps de calcul de la distance paroi en fonction du nombre de points sur les parois pour différents nombre de points dans le domaine, (b) Pente en fonction du nombre de points dans le domaine, (c) Temps de calcul de la distance paroi en fonction du nombre de points dans le domaine pour différents nombre de points sur les surfaces, (d) Pente en fonction du nombre de points sur les surfaces

à l'itération globale suivante ; on résout les équations de continuité et de mouvement à l'aide de la viscosité turbulente calculée à l'étape précédente et on recalcule les champ k et ω de manière itérative en ajustant μ_t . Ces étapes sont alors répétées jusqu'à ce que le critère de convergence soit rencontré.

L'approche **tout couplée**, quant à elle, consiste à résoudre toutes les équations simultanément. Dans le cadre du projet, nous avons choisi d'implémenter le modèle de turbulence $k-\omega$ SST et de le résoudre sous une formulation tout couplée. Comme on le verra plus tard cepen-

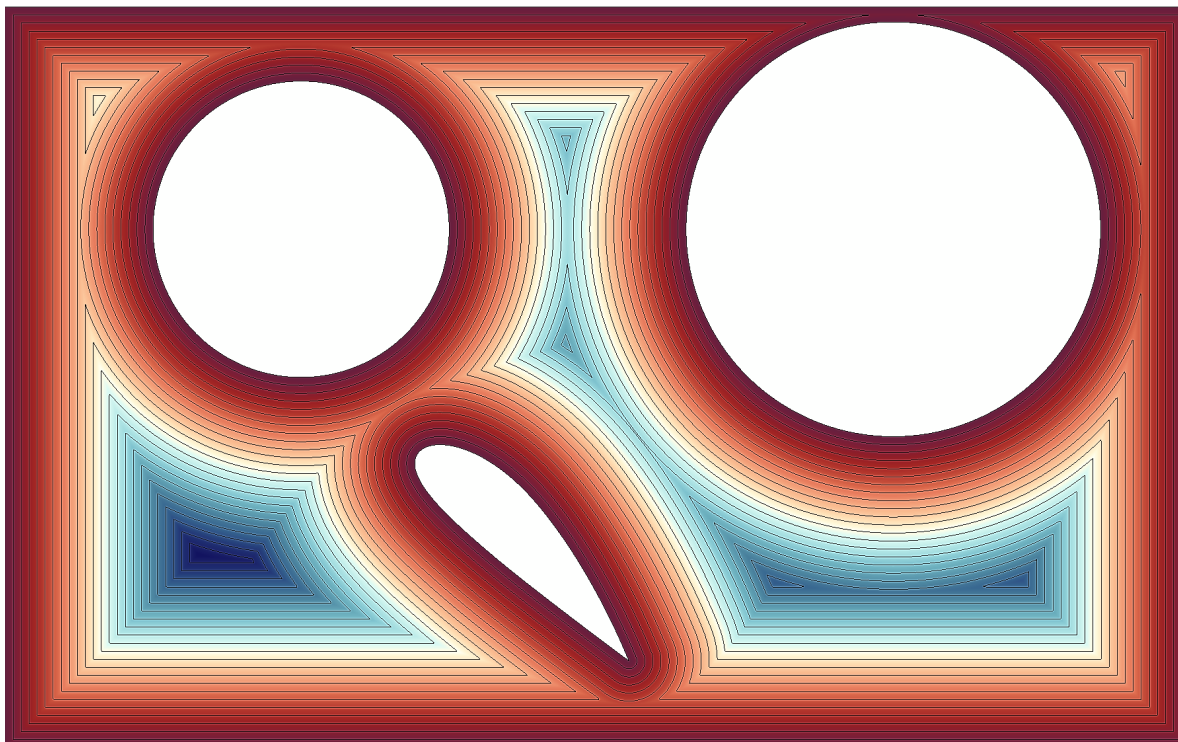


Figure 3.4 Contour de la distance paroi sur un domaine comprenant deux cercles et un profil d'aile entre 4 parois. Le domaine contient 800 000 noeuds, 7250 sont sur les parois. Temps de calcul : 3,92 secondes

dant, une astuce simple permet de résoudre les équations en semi-couplé lorsque le problème est trop raide numériquement pour le résoudre directement avec l'approche tout couplée. L'avantage de résoudre les équations à l'aide d'une formulation tout couplée est surtout la vitesse avec laquelle le système sera résolu. Si on résout le système à l'aide de la méthode de Newton, on peut s'attendre à avoir un taux de convergence quadratique et ainsi obtenir une convergence au zéro machine après quelques itérations seulement. Pour une plaque plane sans gradient de pression par exemple, nous avons obtenu la courbe de convergence illustrée sur la figure 3.7.

3.5.1 Approche couplée : Méthode de Newton

Lorsqu'on résout le système en formulation tout couplée, on peut directement appliquer la méthode de Newton. Cette dernière est très populaire en raison de son efficacité pour la résolution des systèmes d'équations non-linéaires (Fortin, 2011). Elle est basée sur le développement en séries de Taylor. On cherche alors à déterminer la correction δx adéquate qui fera en sorte de satisfaire l'équation suivante. La figure 3.5 illustre bien le processus.

$$R(x_i + \delta x_i) = 0 \quad (3.20)$$

Où R est le résidu du système à résoudre.

À l'aide d'un développement en série de Taylor d'ordre 1 autour de x_i , on peut facilement montrer que, si on néglige les termes de degré 2 ou supérieurs, l'équation 3.20 peut s'écrire de la façon suivante.

$$\left[\frac{\partial R}{\partial x} \right] \delta x \simeq -R(x_i) \quad (3.21)$$

Avec

$$x_i = x_{i-1} + \delta x \quad (3.22)$$

Dans le cas qui nous intéresse, la fonction R est un système de plusieurs équations R_u , R_v , R_T , R_k , R_ω et R_p qui s'expriment de la manière suivante.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_u}{\partial u} & \frac{\partial R_u}{\partial v} & 0 & \frac{\partial R_u}{\partial k} & \frac{\partial R_u}{\partial \omega} & \frac{\partial R_u}{\partial p} \\ \frac{\partial R_v}{\partial u} & \frac{\partial R_v}{\partial v} & 0 & \frac{\partial R_v}{\partial k} & \frac{\partial R_v}{\partial \omega} & \frac{\partial R_v}{\partial p} \\ \frac{\partial R_T}{\partial u} & \frac{\partial R_T}{\partial v} & \frac{\partial R_T}{\partial T} & \frac{\partial R_T}{\partial k} & \frac{\partial R_T}{\partial \omega} & 0 \\ \frac{\partial R_k}{\partial u} & \frac{\partial R_k}{\partial v} & 0 & \frac{\partial R_k}{\partial k} & \frac{\partial R_k}{\partial \omega} & 0 \\ \frac{\partial R_\omega}{\partial u} & \frac{\partial R_\omega}{\partial v} & 0 & \frac{\partial R_\omega}{\partial k} & \frac{\partial R_\omega}{\partial \omega} & 0 \\ \frac{\partial R_p}{\partial u} & \frac{\partial R_p}{\partial v} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta T \\ \delta k \\ \delta \omega \\ \delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_u \\ -R_v \\ -R_T \\ -R_k \\ -R_\omega \\ -R_p \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Dans *Cadyf*, le calcul du Jacobien de la matrice élémentaire est effectué numériquement par différences finies et le système est résolu à l'aide d'une décomposition LU. L'algorithme 1 résume les principales étapes.

L'approche couplée a l'avantage de converger quadratiquement. En revanche, elle nécessite la résolution d'une matrice de plus grande taille avec des termes supplémentaires (comparativement aux méthodes découplée et semi-couplée). Chaque itération est donc plus coûteuse. De plus, la méthode risque de diverger plus facilement étant donné que la diagonale est moins prédominante, ce qui est d'autant plus vrai si la solution initiale n'est pas suffisamment près de la solution initiale (Navah). Comme on le verra dans la prochaine sous-section, pour remédier à ces défauts on a généralement recours à une méthode semi-couplée pour les premières itérations. Puis, lorsque la solution est suffisamment convergée, on résout en tout-couplé.

Algorithm 1 : Méthode de Newton

```

1:
2:  $x^i = [u_0, v_0, T_0, k_0, \omega_0, p_0]^T$  ▷ Initialisation de la solution
3:
4: while  $\|R(x^i)\|_{L_2} < \text{tol}$  do ▷ Définition d'une tolérance de convergence sur le résidu
5:
6:    $R(x^i) = R(u^i, v^i, T^i, k^i, \omega^i, p^i)$  ▷ Calcul du membre de droite
7:
8:    $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{R(x^i) - R(x^i - \epsilon)}{\epsilon}$  ▷ Calcul du Jacobien numérique
9:
10:   $\left[\frac{\partial R}{\partial x}\right] \delta \vec{x} = -R(x^i)$  ▷ Décomposition LU
11:
12:   $x^i = x^i + \delta x$  ▷ Mise à jour de la solution
13:
14: end while
  
```

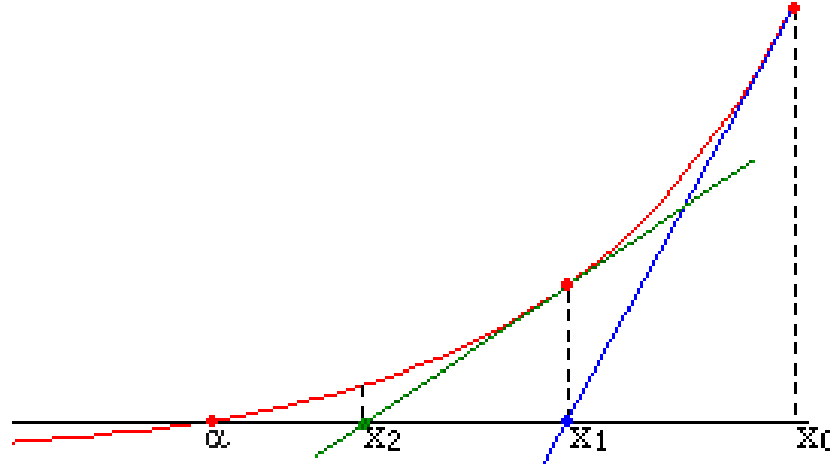


Figure 3.5 Illustration de la méthode de Newton en 1D, en abscisse on a x et en ordonné $R(x)$. Copyright L. Cham, 2004. Reproduit avec permission (Cham, 2004)

3.5.2 Approche semi-couplée : Méthode du point fixe

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, lorsque la solution initiale est trop éloignée de la solution finale, il arrive souvent que la méthode de Newton échoue. C'est notamment le cas lorsqu'on tente de faire converger une solution à partir de zéro sur le premier maillage. En effet, sur le premier maillage, nous prenons comme solution initiale un champ constant pour chaque variable, car nous n'avons pas d'estimé préalable de la solution. À partir du second maillage, la solution initiale est interpolée du maillage précédent et la formulation semi-

couplée n'est théoriquement plus nécessaire. Cependant, en pratique, on continue avec une formulation semi-couplée pour les premières itérations le temps que la physique du problème soit bien capturée. Dans ce genre de situation, le recours à une formulation semi-couplée favorise la convergence. La figure 3.6 illustre assez bien le principe général de la méthode et la raison pour laquelle l'algorithme converge moins rapidement.

Dans la formulation semi-couplée, on se sert de la solution à l'itération précédente pour découpler les équations du mouvement-continuité-énergie de celles de turbulence. Pour ce faire, on utilise les champs de k et ω de l'itération précédente pour calculer μ_t et pour résoudre les équations de mouvement-continuité-énergie. La contribution de k , ω et μ_t est alors transférée au membre de droite, ce qui aide à relaxer le système. Pour ce qui est des équations k et ω , on utilise les champs de vitesse u et v , ainsi que μ_t à l'itération précédente. Ainsi, les équations sont à la fois découplées (mouvement-continuité-énergie et turbulence) et couplées (résolution de k et ω implicite). On se retrouve donc avec le système suivant à résoudre.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_u}{\partial u} & \frac{\partial R_u}{\partial v} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial R_u}{\partial p} \\ \frac{\partial R_v}{\partial u} & \frac{\partial R_v}{\partial v} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial R_v}{\partial p} \\ \frac{\partial R_T}{\partial u} & \frac{\partial R_T}{\partial v} & \frac{\partial R_T}{\partial T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial R_k}{\partial k} & \frac{\partial R_k}{\partial \omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial R_\omega}{\partial k} & \frac{\partial R_\omega}{\partial \omega} & 0 \\ \frac{\partial R_p}{\partial u} & \frac{\partial R_p}{\partial v} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta T \\ \delta k \\ \delta \omega \\ \delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_u \\ -R_v \\ -R_T \\ -R_k \\ -R_\omega \\ -R_p \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

En théorie, il est possible de décomposer le système en deux sous-systèmes découplés et de les résoudre séparément. En pratique, comme nous le verrons dans l'algorithme 2, nous assemblons les deux sous-systèmes au sein de la même matrice afin d'en faire la résolution. On utilise alors une méthode de Newton pour résoudre la matrice globale, ce qui n'a aucun impact sur la façon dont est formulé le problème ; celui-ci reste semi-couplé.

Bref, nous avons abordé l'aspect numérique et survolé les algorithmes de résolution. Le tableau 3.1 en recense d'ailleurs les principaux avantages/inconvénients. La section suivante portera sur la stabilité de ces méthodes lorsqu'elles sont utilisées conjointement avec les lois de paroi consistantes.

Algorithm 2 : Méthode de Substitution

```

1:
2:  $x_m^i = [u^0, v^0, T^0, k^0, \omega^0, p^0]^T$  ▷ Initialisation de la solution
3:  $x_t^i = [u^0, v^0, k^0, \omega^0]^T$ 
4:
5: while  $\|R(x^i)\|_{L_2} < \text{tol}$  do ▷ Définition d'une tolérance de convergence sur le résidu
6:
7:    $R_m(x_m^i) = R_m(u^i, v^i, T^i, k^{i-1}, \omega^{i-1}, p^i)$  ▷ Calcul du membre de droite pour  $R_m$ 
8:    $R_t(x_t^i) = R_t(u^{i-1}, v^{i-1}, k^i, \omega^i)$  ▷ Calcul du membre de droite pour  $R_t$ 
9:
10:   $\frac{\partial R_m}{\partial x_m} = \frac{R_m(x_t^i) - R_m(x_m^i - \epsilon)}{\epsilon}$  ▷ Calcul du Jacobien numérique Eq. de mouv.
11:   $\frac{\partial R_t}{\partial x_t} = \frac{R_t(x_t^i) - R_t(x_t^i - \epsilon)}{\epsilon}$  ▷ Calcul du Jacobien numérique Eq. de Turb.
12:
13:   $\begin{bmatrix} \frac{\partial R_m}{\partial x_m} & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_t}{\partial x_t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_m \\ \delta x_t \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_m(x_m^i) \\ R_t(x_t^i) \end{pmatrix}$  ▷ Décomposition LU
14:
15:   $\begin{pmatrix} x_m^i \\ x_t^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_m^i \\ x_t^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta x_m \\ \delta x_t \end{pmatrix}$  ▷ Mise à jour de la solution
16:
17:   $x_m^i = [u^i, v^i, T^i, k^{i-1}, \omega^{i-1}, p^i]^T$ 
18:   $x_t^i = [u^{i-1}, v^{i-1}, k^i, \omega^i]^T$ 
19:
20:
21: end while

```

Tableau 3.1 Avantages et inconvénients des algorithmes couplés et semi-couplés

	Avantages	Inconvénients
Approche couplée	Convergence quadratique	Rayon de convergence faible
Approche semi-couplée	Stabilité améliorée	Ordre de convergence faible

3.6 Ordre de convergence

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, en théorie l'approche couplée converge quadratiquement. Cependant, bien des facteurs peuvent faire décroître ce taux de convergence. À commencer par le traitement des conditions limites reliées aux lois de parois. En effet, peu importe le type de lois de paroi qui sera utilisé, les conditions limites seront appelées à changer d'une itération à l'autre. Dans les lois de paroi standard par exemple, le cisaillement à la paroi et la condition de Dirichlet sur ω sont tous deux fonctions de y^+ , une variable qui dépend de u . Dans le cas des lois de paroi consistantes, si le raccordement se fait dans la zone tampon ($y^+ \in [5, 25]$), la fluctuation de la dérivée normale de k vient s'ajouter au lot. La figure 3.7 montre la performance de la méthode de Newton pour une plaque plane sans

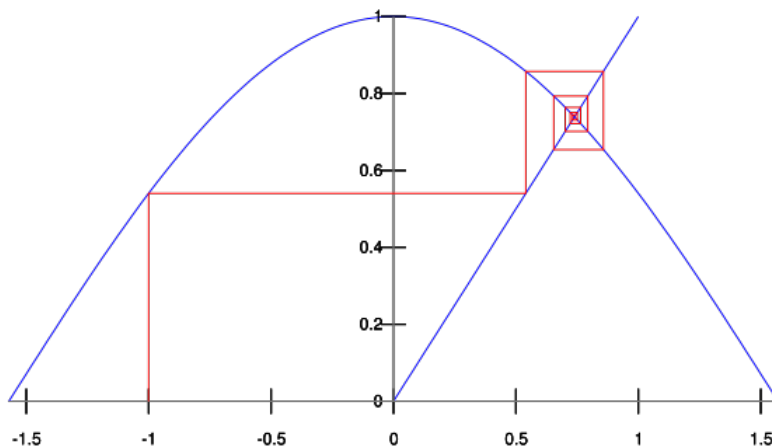


Figure 3.6 Illustration de la méthode du point fixe (substitution) en 1D, en abscisse on a x et en ordonné $R(x)$

gradient de pression avec des lois de paroi consistantes.

Un autre aspect qui n'est pas à négliger est la condition de tangence. Plus précisément la façon dont elle est imposée. En ce qui nous concerne, nous avons choisi de l'implémenter au sens faible à l'aide d'une méthode de pénalisation ce qui a un impact non-négligeable sur l'ordre de convergence de certains problèmes ayant des frontières complexes. Cela peut même parfois mener à une stagnation du résidu. Un problème notamment souligné par (Stokes and Carey, 2011). Une approche mixte n'aurait théoriquement pas eu le même impact sur l'ordre de convergence. En effet, pour certains problèmes dont les parois sont courbes, approximées par des splines cubiques par exemple, l'imposition d'une condition de tangence au sens faible est particulièrement adaptée à la situation.

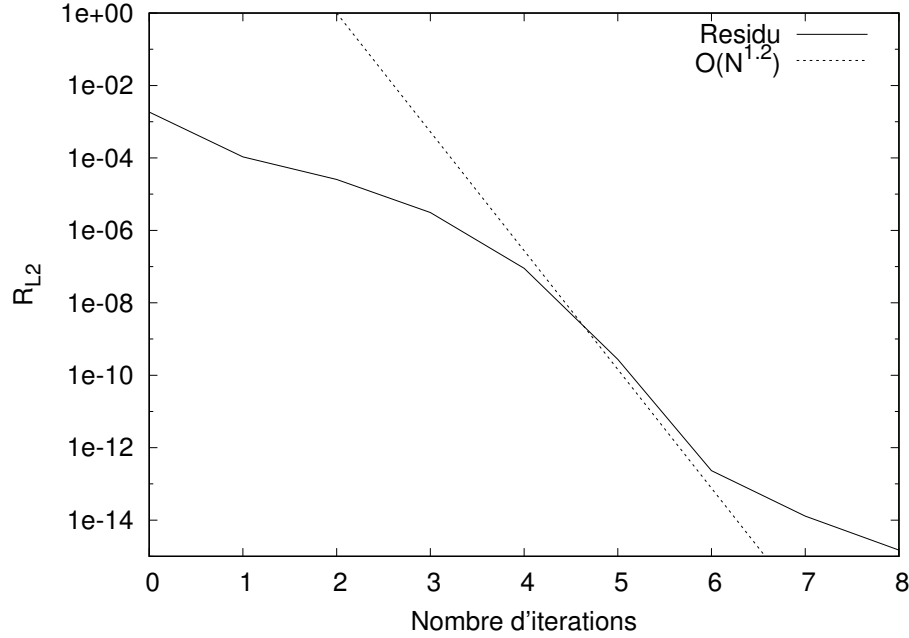


Figure 3.7 Norme L_2 du résidu pour une plaque plane sans gradient de pression à $Re = 5M$ avec lois de paroi constantes

3.7 Adaptation du maillage

Le modèle de turbulence $k - \omega$ SST est un modèle particulier dans la mesure où il applique, à l'aide d'une fonction de pondération, le modèle $k - \epsilon$ dans les zones libres et $k - \omega$ dans les zones cisailées près des parois. Or, pour cette raison la stabilité numérique du schéma de résolution est très sensible à la topologie du maillage. En effet, comme on a recourt à une interpolation de la solution sur le maillage précédent pour débiter la simulation sur le maillage courant, il arrive que dans certaines zones le modèle de turbulence appliqué change d'un maillage à l'autre, ou même d'une itération à l'autre. Nous avons donc entrepris de faire l'adaptation du maillage selon les fonctions de pondération F_1 et F_2 de manière à minimiser l'impact de la topologie du maillage sur la représentation des fonctions de pondération. Cet ajout a été bénéfique, en particulier lors de la phase d'estimation de la solution initiale qui s'est montrée plus stable.

3.7.1 Estimation d'erreur par projection locale

Pour faire l'adaptation du maillage, il faut être en mesure d'estimer l'erreur de discrétisation sur la solution éléments finis Q_h , notée E_h , et donnée par :

$$E_h = \|Q_{exa} - Q_h\|_{H^1} = \int_{\Omega} (\nabla Q_{exa} - \nabla Q_h) \cdot (\nabla Q_{exa} - \nabla Q_h) d\Omega \quad (3.25)$$

Or, en pratique, nous ne connaissons pas le gradient de la solution exacte ∇Q_{exa} au problème que nous souhaitons résoudre ; il nous faudra donc déterminer une fonction ∇Q^* qui soit plus précise que ∇Q_h . L'idée proposée dans (Zienkiewicz and Zhu, 1992a) et (Zienkiewicz and Zhu, 1992b) est de reconstruire le gradient de la solution globale (continue) à partir du gradient de la solution éléments finis (discontinue aux interfaces et linéaire par morceaux) (Ignat et al., 1998). En d'autres mots, utiliser les gradients propres à chaque élément ∇Q_h pour déterminer une approximation du gradient de la solution globale ∇Q^* qui soit unique (donc continue) et d'un degré supérieur. Il introduit la notion de *patch élémentaire* (voir figure 3.8) (Dufour and Pelletier, 1998). En ce sens, pour chaque noeud du domaine, nous définissons un *patch* qui contient tous les éléments qui lui sont connectés (ayant un noeud en commun).

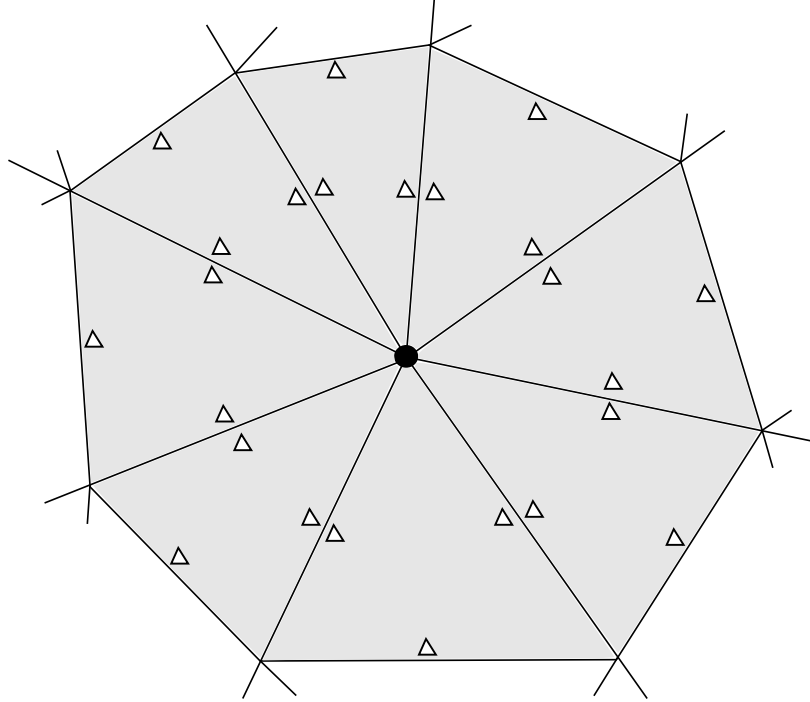


Figure 3.8 Exemple typique d'un *patch* pour des éléments quadratiques. Les symboles ∇ représentent l'échantillonnage du gradient de la solution éléments finis (∇Q_h)

À partir de là, nous construisons un polynôme P d'un degré supérieur à celui du gradient de la solution éléments finis ∇Q_h . Nous choisissons un polynôme P de degré 2, car, dans *Cadyf*, les gradients de la solution sont représentés linéairement (sauf celui de la pression qui est représenté par une constante). En ce sens, la méthode préconisée par (Zienkiewicz and Zhu, 1992a) est de simplement déterminer P par une minimisation au sens des moindres carrés.

$$\nabla Q^* = P \cdot c \quad (3.26)$$

avec

$$P = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\} \quad (3.27)$$

$$\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_6\}^T \quad (3.28)$$

Où \vec{c} est la solution au problème de minimisation suivant :

$$\min \frac{1}{2} \int_{\Omega_p} (P \cdot \vec{c} - \nabla Q_h)^2 d\Omega_p \quad (3.29)$$

L'étape suivante consiste à récupérer ∇Q^* aux noeuds des éléments. Pour les sommets des éléments, il suffit d'y évaluer ∇Q^* à l'aide du polynôme qui lui est associé. En revanche, pour les points milieux, nous choisirons plutôt d'évaluer ∇Q^* aux points milieux à partir des polynômes aux deux extrémités de l'arrête et d'en faire la moyenne (voir figure 3.9).

$$\overline{\nabla Q^*}(x_i) = P(x_i) \cdot \vec{c}_{x_i} \quad \text{Sur les sommets} \quad (3.30)$$

$$\overline{\nabla Q^*}(x_{i+1/2}) = \frac{1}{2} \left(P(x_i) \cdot \vec{c}_{x_i} + P(x_{i+1}) \cdot \vec{c}_{x_{i+1}} \right) \quad \text{Sur les points milieux} \quad (3.31)$$

Une fois l'étape de projection terminée, il ne reste plus qu'à calculer l'erreur élémentaire e_h et l'erreur globale E_h .

$$e_h = \int_e \left(\overline{\nabla Q^*} - \nabla Q_h \right) \cdot \left(\overline{\nabla Q^*} - \nabla Q_h \right) d\Omega \quad (3.32)$$

$$E_h = \|e_h\|_{L2} \quad (3.33)$$

Lorsque l'erreur est calculée, il reste à déterminer la méthode optimale pour faire le raffine-

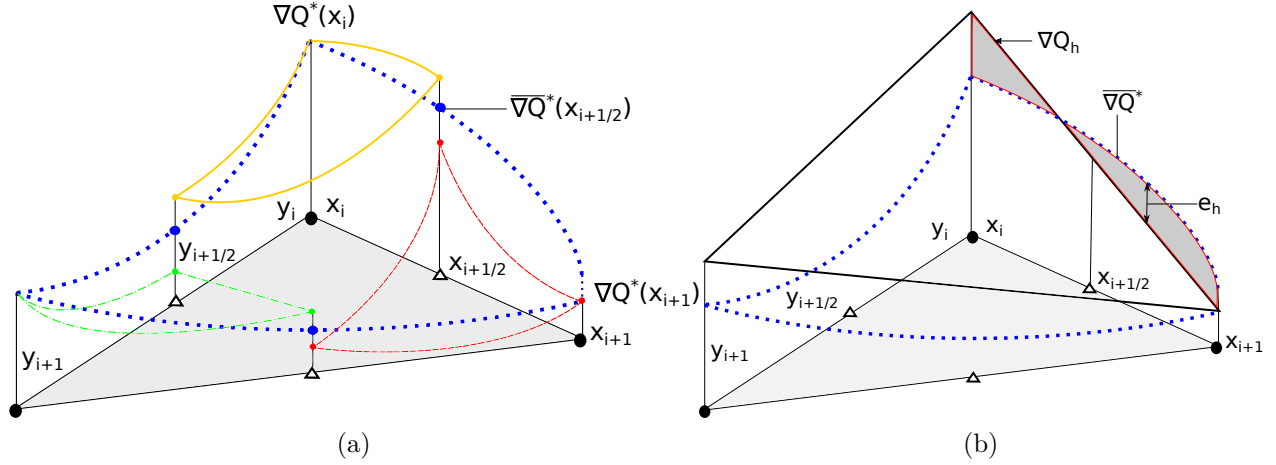


Figure 3.9 (a) Illustration de la projection de ∇Q^* sur la base de l'élément (b) Une fois que le gradient de la solution globale a été récupéré sur la base élémentaire, il ne reste plus qu'à évaluer l'erreur.

ment du maillage.

3.7.2 Raffinement du maillage

Maintenant que nous avons une évaluation de l'erreur locale dans tout le domaine, il ne reste plus qu'à calculer le facteur de raffinement local. Typiquement, on souhaite équidistribuer l'erreur sur tous les éléments, afin d'obtenir un maillage optimal. L'erreur cible sur chaque élément e_{cible} est donc donnée par l'équation suivante. (Colin, 2003)

$$e_{cible} = \zeta \frac{E_h}{\sqrt{N}} \quad (3.34)$$

où N est le nombre d'éléments dans le maillage, E_h , la norme L2 de l'erreur globale et ζ , le facteur de réduction de l'erreur.

Il ne reste plus maintenant qu'à relier l'erreur cible e_{cible} souhaitée à la taille de l'élément. Or, on sait que pour l'élément de *Taylor Hood*, l'erreur de discrétisation est d'ordre 2. Et donc, elle suit la relation suivante (Lacasse, 2000).

$$e_{cible} = ch_e^2 \quad (3.35)$$

Ainsi, on peut montrer que la taille optimale des éléments sur le nouveau maillage est donnée par :

$$h_{e_{cible}} = \sqrt{\frac{\zeta E_h}{e_h \sqrt{N}}} h_e \quad (3.36)$$

Dans le cadre du projet, nous avons suivi la même méthodologie pour ajouter les normes équivalentes de F_1 et F_2 dans les choix d'adaptation du maillage.

Pour conclure, nous avons abordé plusieurs aspects numériques se rapportant à l'implémentation du modèle de turbulence $k - \omega$ SST avec des lois de parois consistantes. Notamment, le développement des équations de k et ω sous leurs forme faible, au sens de Galerkin, ainsi que sous leur forme stabilisée (SU/SUPG). Les conditions limites associées à l'application des lois de paroi consistantes ont été abordées plus en détails. Nous avons également détaillé l'algorithme de calcul de la distance à la paroi ainsi que les principales approches concernant le couplage des équations. Finalement, une méthode de raffinement de maillage a été proposée. La section suivantes traitera de la vérification et la validation du modèle de turbulence $k - \omega$ SST.

CHAPITRE 4 APPLICATION

4.1 Vérification : méthode des solutions manufacturées (MMS)

Le développement d'un code de calcul de haute performance en CFD est un chemin semé d'embûches. Plusieurs codes de calcul peuvent dépasser le million de lignes. Un développeur novice peut donc facilement s'y perdre et omettre de modifier une ligne ou simplement faire une erreur de programmation qui changerait la nature des équations résolues. En ce sens, la technique des solutions manufacturées vise à répondre à deux questions que se posent tous bons numériciens. Résolvons-nous bien les équations que nous pensons résoudre ? Si oui, est-ce que le comportement numérique (ordre de convergence, stabilité, consistance, etc.) du schéma de résolution est respecté ?

Le principe général est relativement simple, plutôt que de résoudre le système d'équations sous sa forme initiale $R(u) = 0$, on impose une expression analytique u_{mms} et on détermine f telle que $R(u) - f(u_{mms}) = 0$. On cherche ensuite à vérifier que u tend bel et bien vers u_{mms} selon le même ordre de convergence que celui du schéma numérique. La première étape consiste donc à déterminer une expression analytique u_{mms} . Généralement, il est conseillé de choisir une solution qui soit plausible, ou du moins qui ne dénature pas les équations à résoudre afin d'assurer un bon comportement numérique. On évite par exemple d'imposer une énergie cinétique $k_{mms} < 0$, en particulier si on résout les équations en formulation logarithmique. Bien que ce ne soit pas explicitement nécessaire de le faire, il est également recommandé de choisir une solution qui satisfait, au moins, l'équation de continuité. De cette manière, on s'assure de conserver un minimum de sens physique au problème. On ajoute ensuite, par l'entremise de termes sources, ce qui manque théoriquement à l'expression que nous avons choisie pour qu'elle satisfasse les équations qu'on souhaite vérifier. On aurait ce qui suit pour les équations de Navier-Stokes moyennées (incompressibles) et celle de l'énergie.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{u}_i) + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (-\bar{p} \delta_{ij} + \bar{\tau}_{ij}) + [\rho f_i]_{mms} \quad (4.1)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\lambda + \lambda_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right) + [\rho q_i]_{mms} \quad (4.2)$$

Avec les définitions suivantes :

$$[\rho f_i]_{mms} = \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{u}_i) + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{p} \delta_{ij} - \bar{\tau}_{ij}) \right]_{mms} \quad (4.3)$$

$$[\rho q_i]_{mms} = \left[\rho c_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\lambda + \lambda_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right) \right]_{mms} \quad (4.4)$$

L'indice mms indique que ces termes ont été calculés à partir de la solution manufacturée. Finalement, les conditions limites sont tirées de la solution manufacturée.

Pour les conditions de Dirichlet (ou essentielles) on imposera :

$$u_i = u_{i_{mms}} \quad (4.5)$$

Pour les conditions de Neumann (ou naturelles), on impose ceci.

$$\left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \bar{p} \delta_{ij} \right] n_j = \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \bar{p} \delta_{ij} \right]_{mms} n_j \quad (4.6)$$

Pour les lois de paroi, on impose généralement une condition de non pénétration dans la direction normale, tandis qu'on impose une contrainte de friction dans la direction tangentielle. En pratique, l'imposition d'une condition normale non-nulle ne pose aucun problème pour la vérification.

$$\tau_w|_{EF} = -\rho u_k u^* + S_{\tau_w} = - \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) \right]_{mms} \quad (4.7)$$

En choisissant $S_{\tau_w} = \rho u_k u^* - \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) \right]_{mms}$, la solution tendra peu à peu vers la solution manufacturée à mesure que le maillage se raffinera.

De manière similaire, on obtient les conditions limites suivantes pour k et ω (en formulation logarithmique)

$$\frac{\partial K}{\partial \vec{n}}|_{EF} = \frac{u_k (\mu + \mu_t)}{\nu k^+} \frac{\partial k^+}{\partial y^+} + S_K = \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial K}{\partial \vec{n}} \right]_{mms} \quad (4.8)$$

$$W|_{EF} = \ln \left(\frac{\omega^+ u_k^2}{\nu} \right) + S_\omega = W_{mms} \quad (4.9)$$

avec,

$$K = \ln(k) \quad (4.10)$$

$$W = \ln(\omega) \quad (4.11)$$

Pour ce qui est de la température, on impose généralement le flux d'énergie sous la forme suivante

$$Q_W|_{EF} = -\rho c_p u^* T^* + S_T = -(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{mms} \quad (4.12)$$

Comme la solution exacte est connue, il est également possible de calculer l'erreur exacte. Il est alors possible de vérifier que le taux de convergence de l'erreur est cohérent avec celui de la méthode de résolution. On effectue alors une étude de raffinement de maillage et on mesure le taux de convergence. On vérifie alors que l'on obtient le taux de convergence théorique relié à la méthode de résolution.

4.1.1 Couche turbulente cisailée avec lois de paroi

Pour la validation du modèle de turbulence $k - \omega$ SST, la solution de la couche cisailée turbulente a été sélectionnée, d'abord en raison de sa ressemblance physique avec une vraie couche turbulente cisailée, mais surtout parce qu'elle permet d'activer tous les termes de l'équation. En effet, bien qu'il existe quelques solutions analytiques aux équations de Navier-Stokes, celles-ci ne sont pas toutes de bonnes candidates pour faire la vérification d'un code numérique. Par exemple, le profil de vitesse est linéaire pour un écoulement de Couette laminaire, les termes contenant des dérivées secondes dans les équations de Navier-Stokes ne seront donc pas activés et le code ne serait alors pas validé dans son entièreté.

Solution manufacturée

$$u = \frac{U_0}{2} \left(1 - \left(\sigma \frac{y}{x} \right) \right) \quad (4.13)$$

$$v = U_0 \frac{\exp(-\sigma^2 \frac{y^2}{x^2})}{2\sigma\sqrt{\pi}} \quad (4.14)$$

$$P = 0 \quad (4.15)$$

$$k = k_0 \left(c_k + \exp(-\sigma^2 \frac{y^2}{x^2}) \right) \quad (4.16)$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{x} \left(c_k + \exp(-\sigma^2 \frac{y^2}{x^2}) \right) \quad (4.17)$$

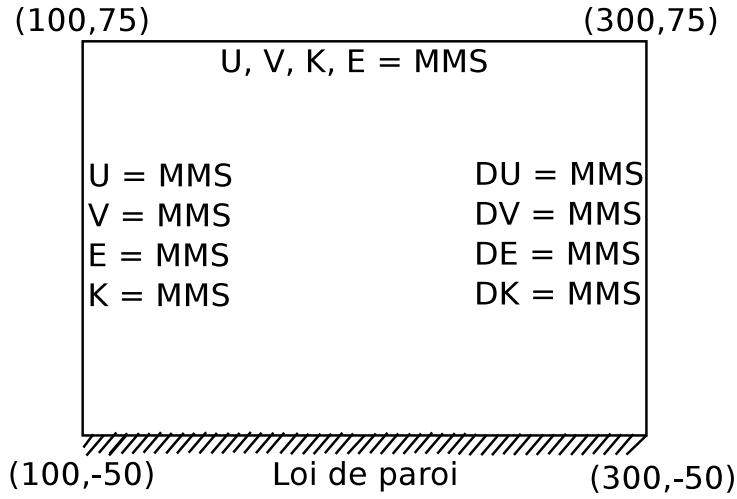


Figure 4.1 Domaine de calcul de la solution manufacturée

Dans le cadre de la vérification du modèle de turbulence $k - \omega$ SST, nous avons vérifié que les normes d'erreur de la pression, de l'énergie de même que celles équivalentes pour k , ω , F_1 et F_2 convergent à l'ordre 2 ($O(h^2)$). Comme on peut le voir sur la figure 4.2, toutes les normes convergent à l'ordre 1 selon N , le nombre de noeuds dans le maillage, ce qui équivaut à l'ordre 2 sur h , car $N \approx \frac{1}{h^2}$.

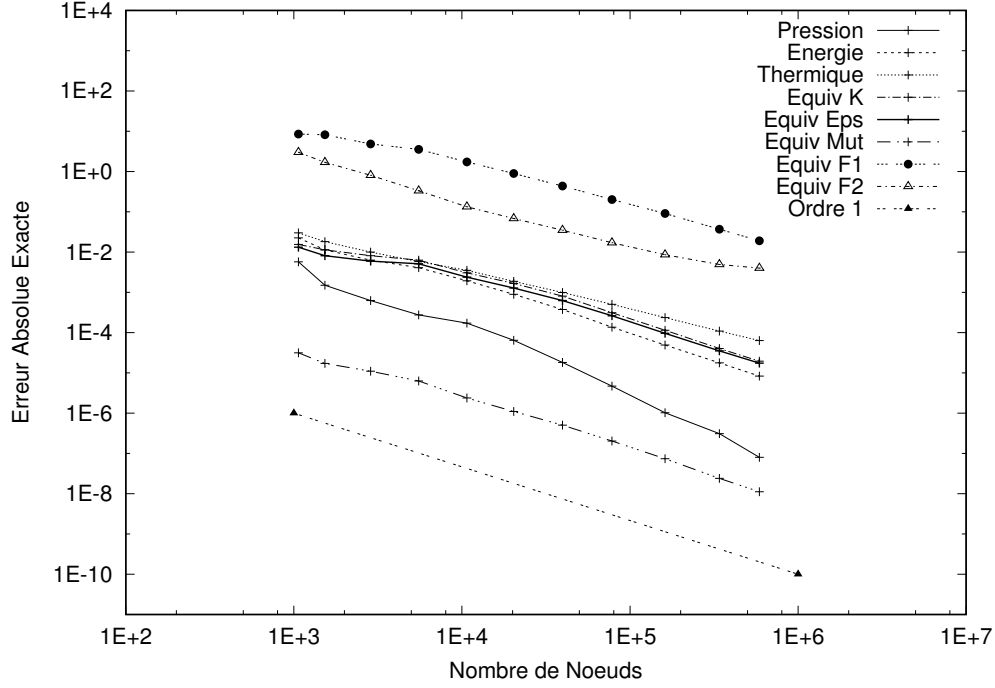


Figure 4.2 Convergence de la semi norme H1 de l'erreur absolue exacte en fonction du nombre de points dans le domaine

On remarque cependant que la norme de F_2 ne converge pas tout à fait à l'ordre 1 lorsque $N > 8 \times 10^5$. Ceci est explicable par le fait que des fonctions min et max sont utilisées dans la définition de F_1 et F_2 , ce qui induit des discontinuités lors du calcul des gradients exacts. L'erreur est cependant très localisée et relativement faible ce qui explique pourquoi la norme de l'erreur globale exacte sur μ_t ne stagne pas elle aussi. Il est possible qu'en augmentant davantage le nombre de noeuds on finirait par observer un stagnement de l'erreur sur μ_t ainsi que sur les variables de turbulence k et ω qui sont elles aussi fonctions de F_1 et F_2 . Néanmoins, il est surprenant de voir qu'il est possible de vérifier le modèle de turbulence $k - \omega$ SST à l'aide de la technique des solutions manufacturées. On aurait en effet pu croire que l'impact de l'erreur induite par le recours à des fonctions min/max dans la définition de nombreux termes aurait été beaucoup plus nocif sur l'ordre de convergence. D'évidence, l'erreur commise par le recours à ces fonctions est minime.

4.2 Validation : Étude de cas tests

Maintenant que nous avons abordé l’aspect vérification du code, attardons nous à la validation des résultats. La technique des solutions manufacturées permet de localiser rapidement un bogue et de nous assurer que les équations qu’on souhaite résoudre sont vraiment celles que l’on résout. L’étape suivante, la validation, cherche plutôt à évaluer la performance du code ; à comparer les résultats avec l’expérience ou la théorie. La plupart du temps, nous utiliserons des données expérimentales, cependant, il arrive que les données expérimentales soient difficiles, voire impossibles, à obtenir. Dans de telles situations, nous utiliserons plutôt des données numériques pour valider nos résultats. Dans la section qui suit, nous nous pencherons sur plusieurs cas de validation typique en modélisation RANS ; la plaque plane sans gradient de pression, la marche descendante, la marche descendante avec gradient de pression adverse et finalement le jet turbulent impactant avec transfert de chaleur. Tous les cas présentés ci-après sont disponibles en libre accès, soit sur le site de la NASA (NASA, 2015), ou celui de l’ERCOFTAC (ERCOFTAC, 2016).

4.2.1 Plaque plane sans gradient de pression

Le premier cas d’application auquel nous nous intéresserons est celui de la plaque plane, en raison de sa simplicité et de l’abondance de données expérimentales et numériques disponibles dans la littérature. De plus, comme les lois de paroi ont été développées à partir des hypothèses de la couche limite unidimensionnelle, nous nous attendons à des résultats particulièrement concordants. Pour des raisons pratiques, nous avons choisi une plaque plane sans gradient de pression à $Re_L = 5 \times 10^6$, un cas qui a été étudié par la NASA et dont les données numériques sont disponibles en libre accès (NASA, 2015). Ces dernières ont été obtenues à l’aide d’un modèle bas Reynold $k - \omega$ SST intégré jusqu’à la paroi. De notre côté, nous avons utilisé le modèle $k - \omega$ SST couplé aux lois de paroi consistantes à deux échelles de vitesse.

Les figures 4.3 et 4.4 montrent l’allure du C_f en fonction de la distance adimensionnelle (x/L). L’expérience de la plaque plane sans gradient de pression est très étudiée et les corrélations pour les coefficients de frottement et de transfert de chaleur sont très nombreuses. Nous avons choisi d’utiliser celle de *White* (White, 2011) pour le coefficient de frottement C_f , donnée par l’équation 4.18, et la relation de *Reynolds – Colburn* (Lienhard and Lienhard, 2013) pour le nombre de *Stanton St*, donnée par l’équation 4.19.

$$C_f = \frac{0.027}{Re_x^{1/7}} \quad (4.18)$$

$$St = \frac{\sqrt{C_f/2}}{(1 + 12.8(Pr^{0.68} - 1)\sqrt{C_f/2})} \quad (4.19)$$

Ces dernières sont valides pour $Re_x > 1E + 05$ (correspondant à $x/L > 0.04$ sur les figures) et sont réputées être fidèles à l'expérience dans une marge de $\pm 5\%$.

En ce qui a trait à la solution numérique, rappelons d'abord les définitions du C_f et de St .

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u^2} \quad (4.20)$$

$$St = \frac{h}{\rho u c_p} = \frac{q_w}{\rho u_\infty c_p (T_\infty - T_w)} \quad (4.21)$$

Il existe typiquement deux façons de calculer le cisaillement τ_w et le flux de chaleur à la paroi q_w . La première est d'utiliser les dérivées normales de u et T et de calculer directement le flux et le cisaillement à l'aide des équations 4.22 et 4.23.

$$\tau_w = -(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \quad (4.22)$$

$$q_w = -(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \quad (4.23)$$

Le bémol avec cette technique est que les dérivées normales aux bords du domaine sont particulièrement mal représentées et convergent au mieux linéairement avec la taille du maillage ($O(h)$). La deuxième façon de faire, et celle que nous avons utilisée, consiste à utiliser les définitions de τ_w et q_w données précédemment dans la section sur les lois de paroi. Rappelons que lorsqu'on utilise les lois de paroi à deux échelles de vitesses, τ_w et q_w sont données par les équations suivantes.

$$\tau_w = \rho u_\tau u_k \quad (4.24)$$

$$q_w = \frac{(T - T_w) u_k c_p}{T^+} \quad (4.25)$$

De cette manière, nous nous retrouvons *grosso modo* à exprimer τ_w et q_w à partir de u et T directement, sans avoir à passer par leurs dérivées. Bref, de cette façon, nous récupérons un

ordre sur la convergence des coefficients C_f et St car les fonctions d'interpolation de u et T sont quadratiques ($O(h^2)$). Finalement, on peut exprimer directement C_f et St à partir des variables de la loi de paroi.

$$C_f = \frac{2\rho u_\tau u_k}{\rho u_\infty^2} \quad (4.26)$$

$$St = \frac{(T_w - T)u_k}{\rho u_\infty T^+ (T - T_\infty)} \quad (4.27)$$

Or, si on travaille en variables sans dimension, ρ , u_∞ , $(T_\infty - T_w)$ sont généralement unitaires et les équations se résument donc à ceci.

$$C_f = 2\rho u_\tau u_k \quad (4.28)$$

$$St = \frac{(T_w - T)u_k}{T^+} \quad (4.29)$$

Ces définitions seront utilisées pour tous les cas étudiés dans le présent ouvrage.

Au niveau des résultats, comme les lois de paroi sont basées sur les hypothèses de la couche limite, les performances du modèle de turbulence $k - \omega$ SST couplé aux lois de paroi constantes reflètent exactement ce à quoi nous nous attendions. En effet, l'erreur entre le C_f et le St calculés numériquement et ceux issues des corrélations sont respectivement de 0.05% et 0.25% (à $X/L = 1$). De plus, l'erreur maximale sur C_f et St dans la région de validité des corrélations ($x/L > 0.04$) ne dépasse jamais 4.5%.

Au niveau de la transition laminaire-turbulente, nous n'avons utilisé aucun modèle de transition, il est donc inutile de comparer avec des données expérimentales. Nous pouvons néanmoins nous comparer aux résultats obtenus à l'aide du modèle bas-Reynolds de la NASA. Ainsi, les résultats montrés sur la figure 4.3 sont très concluant, et ce malgré le fait que la solution se raccorde dans la zone tampon des lois de paroi (voir figure 4.4a). La figure 4.4 illustre d'ailleurs le point de raccordement de la solution à $x/L = 1$. Comme nous pouvons le constater, la solution 2D (notée *SST* sur la figure) concorde très bien avec la solution 1D. Voyons maintenant comment se comporte le modèle sur des problèmes plus robustes, notamment des problèmes comportant des gradients de pression.

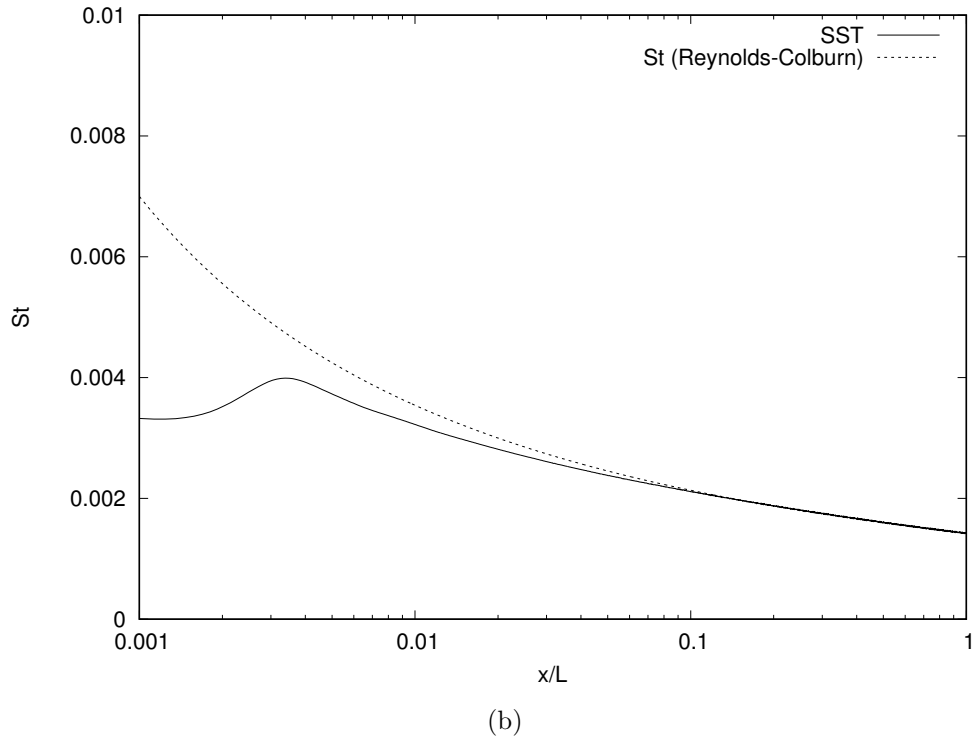
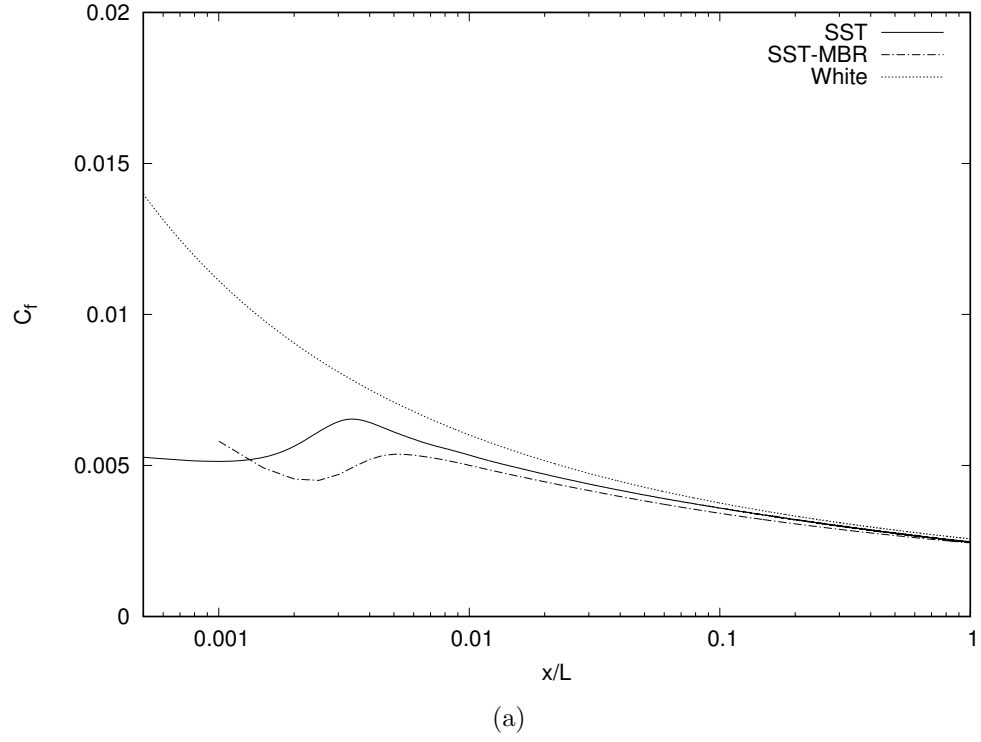


Figure 4.3 (a) Coefficient de friction et (b) Nombre de Stanton en fonction de x/L sur une plaque plane sans gradient de pression à $Re = 5M$

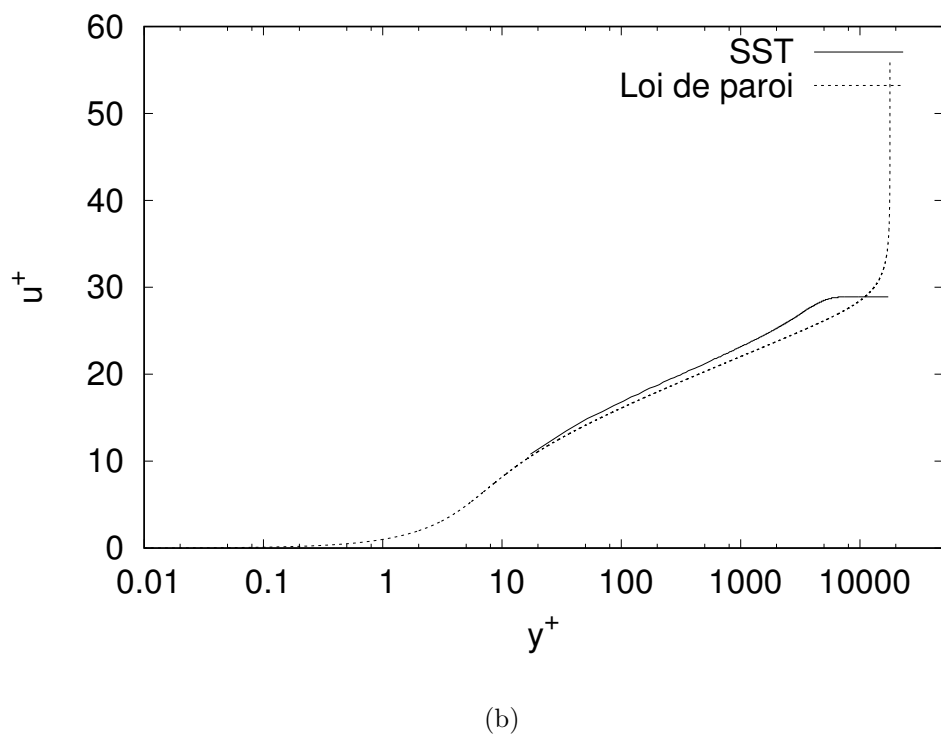
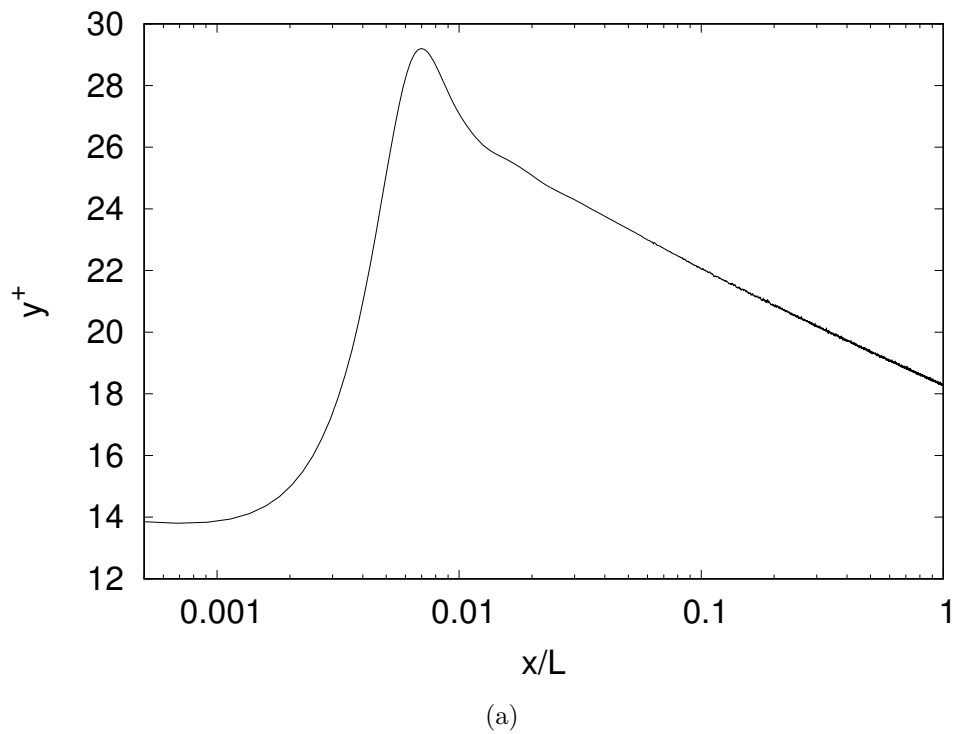


Figure 4.4 (a) Position y^+ de raccordement sur la loi de paroi en fonction de x/L (b) Profil de vitesse u^+ à $x/L = 1$ en fonction de y^+ sur une plaque plane sans gradient de pression à $Re = 5M$

4.2.2 Marche descendante sans gradient de pression adverse

La marche descendante est un problème qui a été largement étudié ces dernières années (Kim et al., 1980; Velikorodny et al., 2010). Il fait d'ailleurs partie des cas tests proposés par la NASA afin d'évaluer les performances des modèles de turbulence. Les données expérimentales de Driver et Seegmiller (Driver and Seegmiller, 1985) en représentent une référence très fiable.

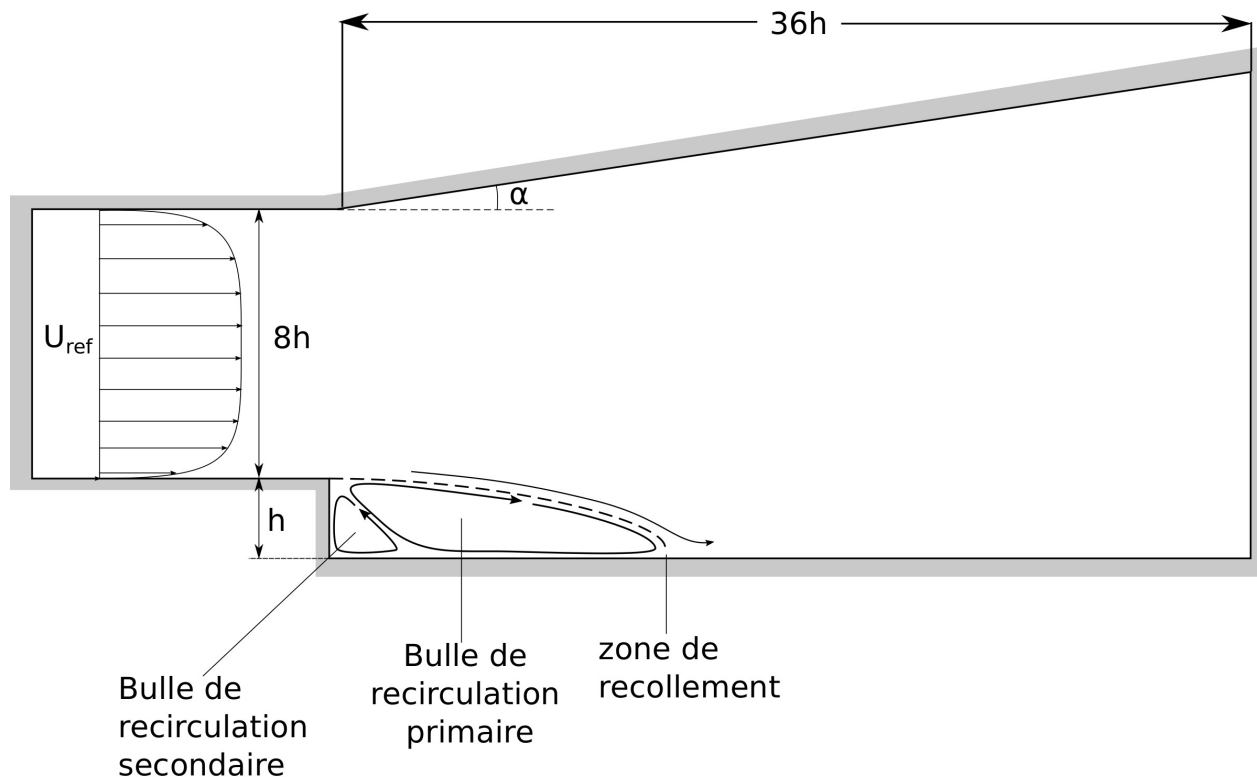


Figure 4.5 Aperçu de la géométrie de la marche descendante pour l'expérience de Driver et Seegmiller (Driver and Seegmiller, 1985)

Dans le cadre du projet, nous avons implémenté le modèle de turbulence $k-\omega$ SST et quelques unes de ses variantes. Notamment la version *BSL*. Celle-ci ne diffère du *SST* que par la fonction de pondération F_2 qui entre en jeu dans la définition de la viscosité turbulente. Le rôle de la fonction de pondération F_2 est de limiter la croissance du terme de production dans l'équation de k dans les zones de cisaillement libre. Le problème de la marche descendante représente en ce sens un bon banc d'essais en raison de l'expansion soudaine de la conduite (voir figure 4.6). Dans la sous-section qui suit, nous nous attarderons à l'impact de cette fonction de pondération.

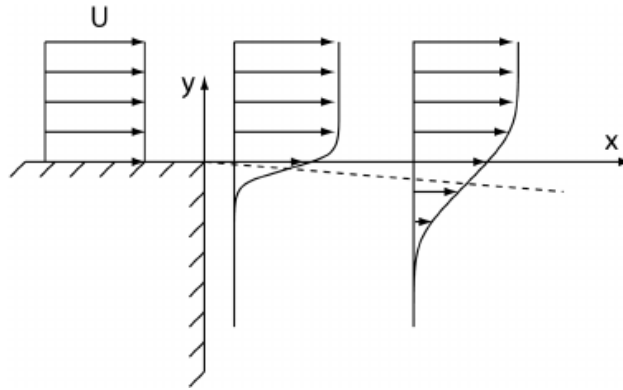


Figure 4.6 Le bout de la marche crée une zone de cisaillement libre en raison la faible vitesse dans la zone de recirculation comparativement à celle de l'écoulement libre

D'un point de vue numérique, les conditions limites sont montrées à la figure 4.7. Le nombre de Reynolds Re_h , basé sur la hauteur de la marche h , est de 36 000. À l'entrée on impose une vitesse horizontale unitaire, un niveau de turbulence k de 1% et un niveau de dissipation ω unitaire. On remarquera la zone de glissement à l'entrée ainsi que la très longue conduite avant la marche. La zone de glissement à l'entrée permet de réduire le niveau de turbulence avant d'entrer dans la conduite et ainsi réduire au minimum la dépendance sur les conditions d'entrée. Pour ce qui est de la longueur du domaine, la zone de glissement à l'entrée fait $10h$, la conduite avant la marche fait $125h$ de long et $8h$ de haut, puis, $36h$ de long et $9h$ de haut après la marche. La longueur du domaine en amont de la marche est très importante afin de garantir des profils de vitesse à l'entrée similaires à ceux de l'expérience de Driver et Seegmiller.

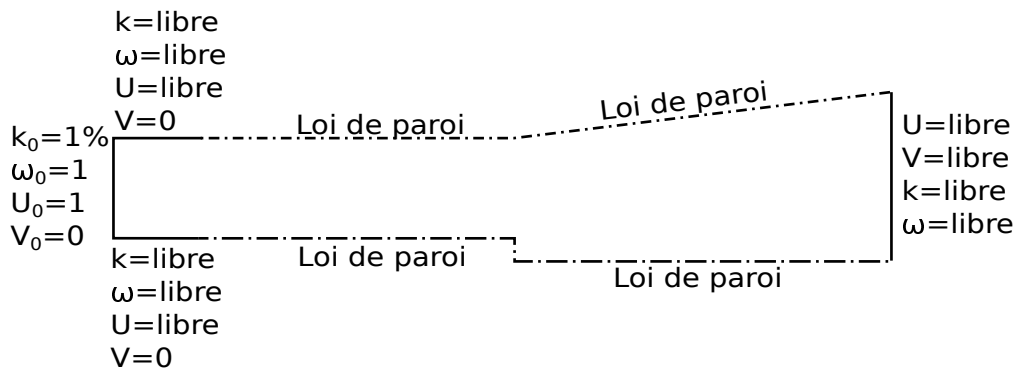


Figure 4.7 Schéma des conditions limites pour la marche à $Re_h = 36000$

Au niveau de la stabilité numérique, bien que le nombre de Reynolds soit faible par rapport

à d'autres problèmes d'application, le cas de la marche descendante représente un bon défi numérique. Du moins, lorsqu'on résout les équations en stationnaire.

Le premier aspect à prendre en compte est l'adaptation du maillage, qui a produit son lot de défis. Notamment, au niveau de la taille des éléments au voisinage du coin de la marche. En effet, nous avons dû limiter la densité d'éléments dans cette zone afin d'éviter une trop grande croissance des gradients de k et de ω . Le fait que les gradients de k et de ω soient grands n'est pas problématique en soi, le problème est plutôt au niveau de l'interpolation de la solution initiale à partir du maillage précédent. En effet, si la solution initiale change drastiquement entre chaque cycle d'adaptation, il devient difficile d'obtenir une convergence sur le maillage suivant.

De plus, la méthode d'adaptation a tendance à minimiser la norme globale de l'erreur absolue plutôt que la norme globale de l'erreur relative. Ceci implique que le maillage n'est pas nécessairement adapté dans les zones où la norme de la solution est faible. Par exemple, dans la zone de recirculation, en particulier dans le coin inférieur de la marche. Le recours à une routine externe a permis de contourner le problème et de raffiner dans ces zones qui sont pourtant critiques à la stabilité. En pratique, imposer une taille d'éléments minimale à la paroi afin d'éviter de trop y grossir les mailles d'un cycle d'adaptation à l'autre a été bénéfique pour la stabilité.

Un autre point à prendre en considération est l'interpolation de la solution. Bien que les éléments dans *Cadyf* soient de type Taylor-Hood (P2-P1), l'interpolation de la solution initiale est linéaire. Ainsi, même lorsque l'on interpole la solution initiale à partir de la solution sur le maillage précédent, le résidu initial demeure élevé. Si le résidu initial est trop haut, la méthode risque de diverger. Pour réduire l'impact de l'erreur d'interpolation, le recours à un facteur de relaxation était nécessaire, en particulier pour les premiers maillages pour lesquels un facteur aussi bas que 0.15 a parfois dû être utilisé. Heureusement, nous avons eu recours à une fonction *usr_relax* permettant de faire varier le facteur de relaxation en fonction de la norme du résidu. Ainsi, il était possible de faire remonter le facteur de relaxation à 1 lorsque le résidu était suffisamment bas. Passons maintenant aux résultats.

Dans les figures qui suivent, on identifie par *SST* et *BSL*, les données qui ont été obtenues avec les lois de paroi consistantes couplées aux modèles de turbulence $k - \omega$ SST et $k - \omega$ BSL, tandis qu'on identifie par *SST-MBR* les données qui ont été obtenues à l'aide du modèle Bas-Reynolds de la NASA (CFL3D).

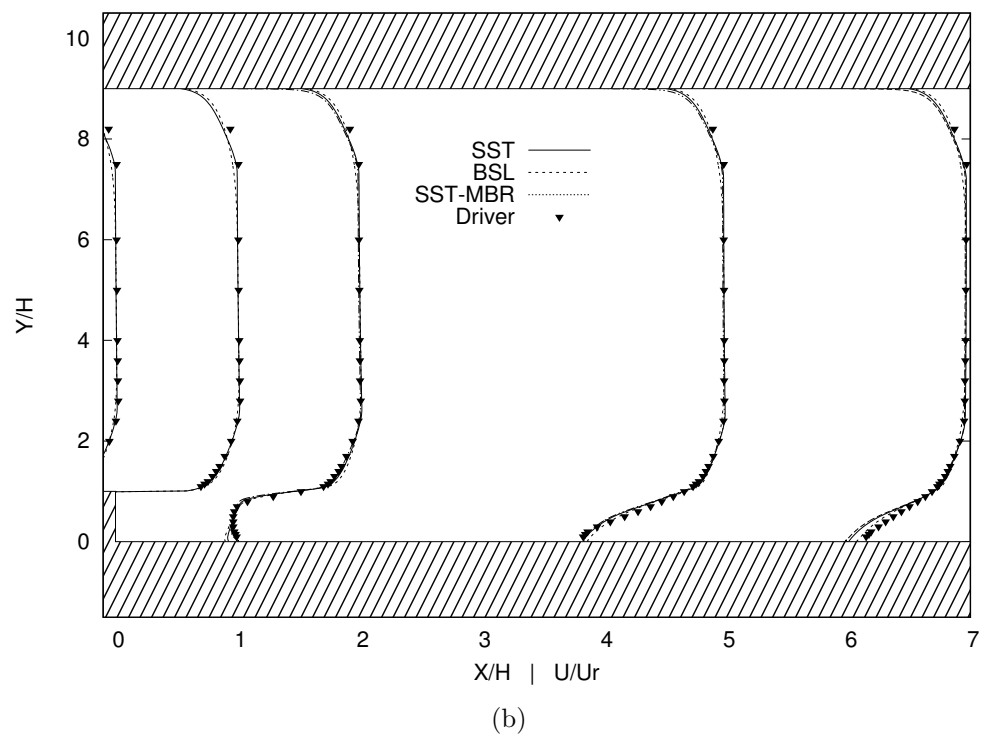
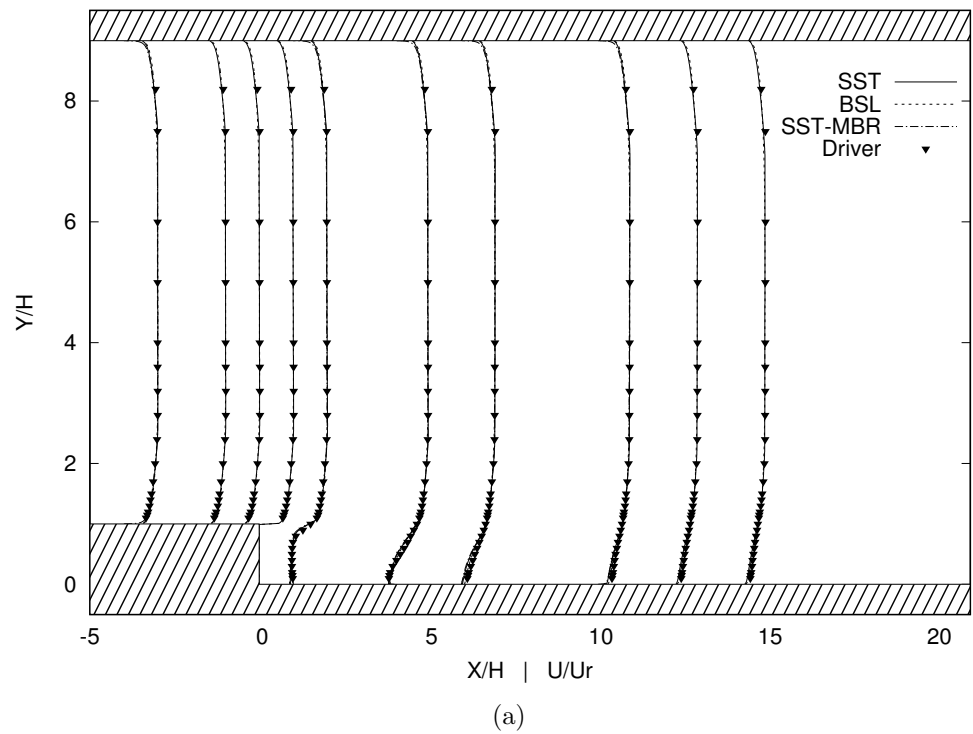


Figure 4.8 (a) Profils de vitesse à différentes stations du problème de la marche descendante sans gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$ (b) Vue rapprochée

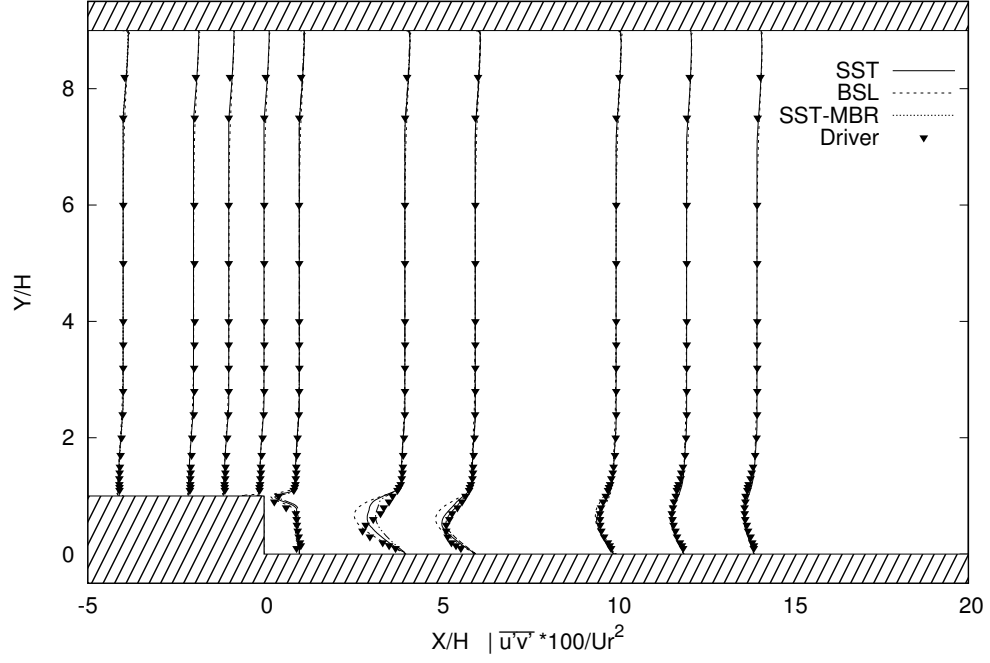
La figure 4.8 montre les profils de vitesse à différentes stations du domaine. Tous les profils ont été adimensionnalisés par rapport à une vitesse de référence U_r qui correspond à la vitesse au centre de la conduite juste avant la marche $U(0, 5) = U_r$. On constate d'emblée que les profils de vitesse prédits à l'aide des lois de paroi consistantes concordent bien avec ceux de la NASA ainsi qu'avec les données de Driver et Seegmiller. Pour les profils de vitesse, les différences entre les modèles SST et BSL sont minimales.

Les données de Driver et Seegmiller [driver1985features] sur la marche descendante sont très exhaustive et comprennent le module des contraintes de Reynolds $\overline{u'v'}$. Pour certains modèles de turbulence plus poussés (RSM, SSG/LRR), cette quantité est directement disponible après la résolution. Pour les modèles standard à deux équations, en incompressible, on peut faire l'approximation suivante :

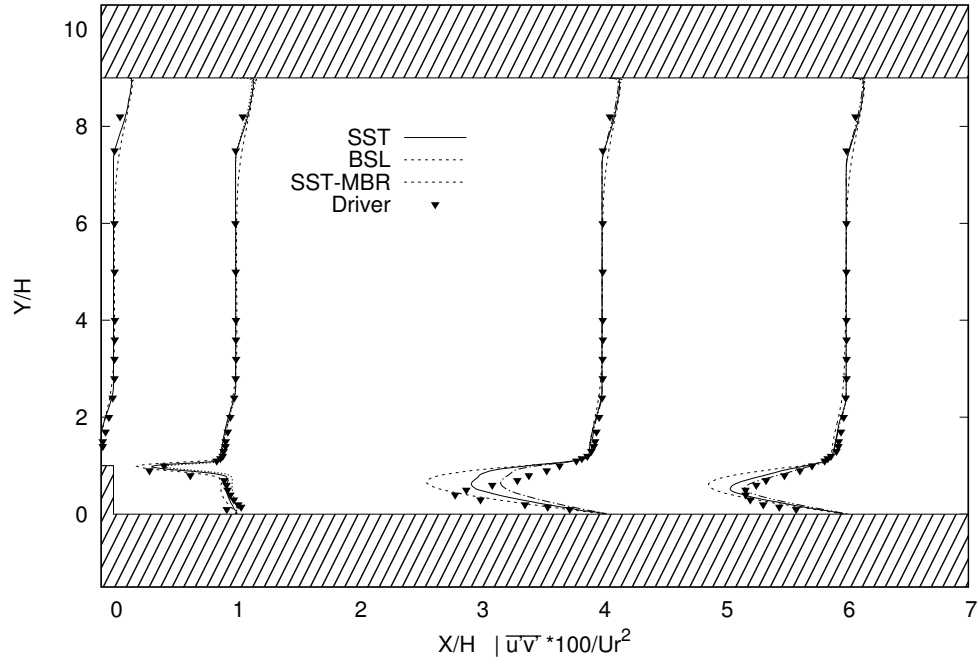
$$\rho \overline{u'_i u'_j} \approx -\tau_{ij} \quad (4.30)$$

qui se réduit à ceci pour les modèles de turbulence à deux équations qui utilisent l'hypothèse de Boussinesq (NASA, 2016) :

$$\overline{u'v'} \approx -\frac{\tau_{ij}}{\rho} = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \quad (4.31)$$



(a)



(b)

Figure 4.9 (a) Profils de $\overline{u'v'}$ à différentes stations du problème de la marche descendante sans gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$ (b) Vue rapprochée

En examinant la figure 4.9, on voit apparaître quelques disparités entre les modèles. Plus spécifiquement, le modèle SST avec les lois de parois consistantes semble être celui qui est le plus près des données expérimentales. En ce qui concerne le modèle BSL, on remarque que pour presque tous les profils, il surestime la contrainte $\overline{u'v'}$. Ceci peut s'expliquer par l'absence de la fonction d'interpolation F_2 dans la définition de la viscosité turbulente du modèle BSL. Son impact est bien réel et encore plus évident sur la figure 4.10.

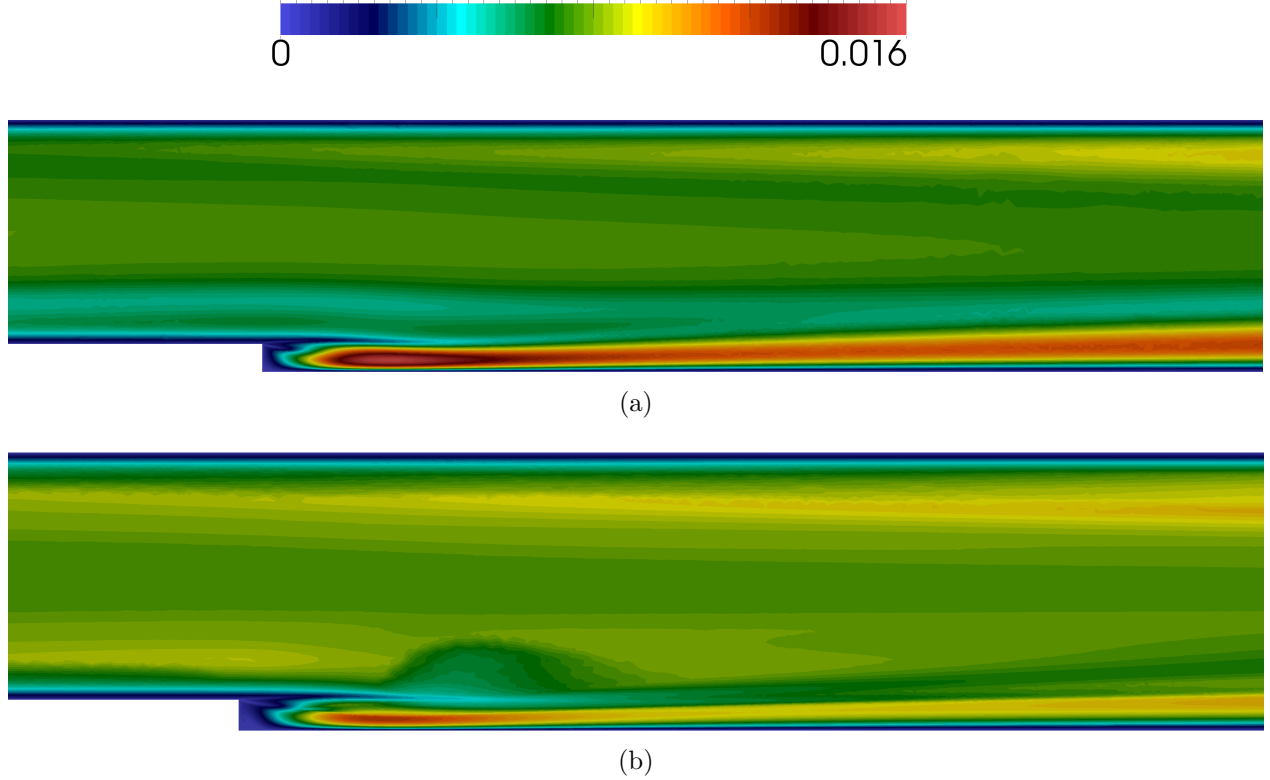


Figure 4.10 (a) Viscosité turbulente pour le modèle $k-\omega$ BSL (b) et pour le modèle $k-\omega$ SST pour le problème de la marche descendante sans gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$

L'estimation de l'emplacement du point de recollement a été effectuée à l'aide du signe du cisaillement pariétal ; le point de changement de signe indique un recollement (voir figure 4.11). Pour ce qui est de la performance de chacun des modèles, la table 4.1 montre que le modèle SST avec les lois de paroi consistantes est celui qui prédit avec le plus d'exactitude le point de recollement. L'écart indiqué correspond à l'écart entre la valeur calculée et la valeur expérimentale corrigée avec l'incertitude (6.16-6.36), on voit par exemple que le modèle SST arrive à -0.32% de 6.16. De plus, la figure 4.11 montre que le modèle SST couplé aux lois de paroi consistantes est celui qui prédit le mieux le coefficient de frottement en aval de la marche. La prédiction que nous obtenons passe même la plupart du temps dans les barres

d'erreurs expérimentales. Pour ce qui est du coefficient de pression, nous notons une bonne concordance avec les données expérimentales, excepté dans la zone de recirculation, où nous observons un léger décalage.

Maintenant, si on s'attarde un peu plus à ce qui se passe *dans* l'écoulement. La figure 4.12 montre les lignes de courant pour le modèle SST, juste après la marche. On distingue clairement un tourbillon secondaire et même tertiaire, si on regarde de plus près (voir 4.13). En ce qui concerne la seconde bulle de recirculation, Driver (Driver and Seegmiller, 1985) et Hall (Hall et al., 2003) ont investigué expérimentalement le second tourbillon, mais n'ont cependant rien trouvé sur le troisième. Les simulations numériques de Biswas et Al. (Biswas et al.) ont montré la deuxième bulle de recirculation, mais sans plus. En revanche, les simulations directes (DNS) de (Kopera et al., 2014) ont montré une troisième bulle de recirculation dont la taille est de $0.11h$ dans la direction verticale et $0.062h$ dans la direction horizontale pour un centre situé à $(x, y) = (0.03h, 0.042h)$. En ce qui nous concerne, la taille de la bulle est de $0.092h$ dans la direction verticale et de $0.079h$ dans la direction horizontale pour un centre situé à $(x, y) = (0.035h, 0.036h)$. Ces résultats sont en concordance avec ceux de Le et Al. (Moin and Kim, 1997), ce qui est surprenants, car cela implique que les lois de paroi consistantes sont en mesure de capturer la physique complexe de l'écoulement sans avoir à intégrer jusqu'à la paroi.

Tableau 4.1 Comparaison de la longueur de la zone de recirculation obtenus numériquement avec les modèles SST, BSL et SST-MBR avec les données expérimentales pour le cas de la marche descendante avec paroi supérieure horizontale

Modèles	Point de rattachement (x/h)	Écart [%]
SST	6.14	-0.32
BSL	5.31	-13.6
SST-MBR	6.48	+3.19
Driver	6.26	± 0.10

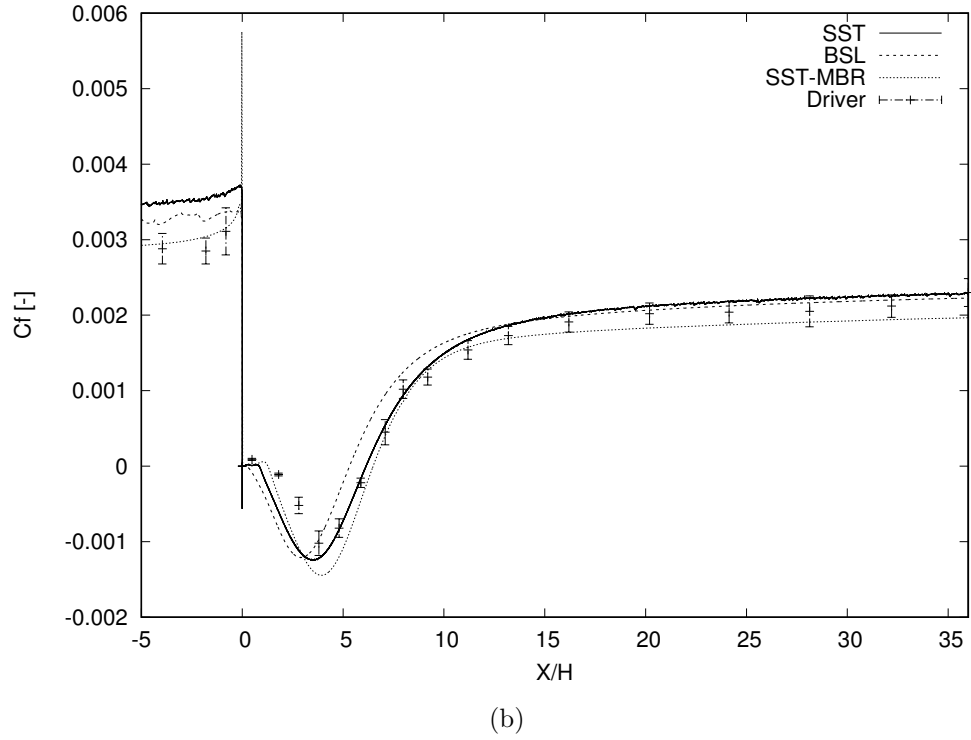
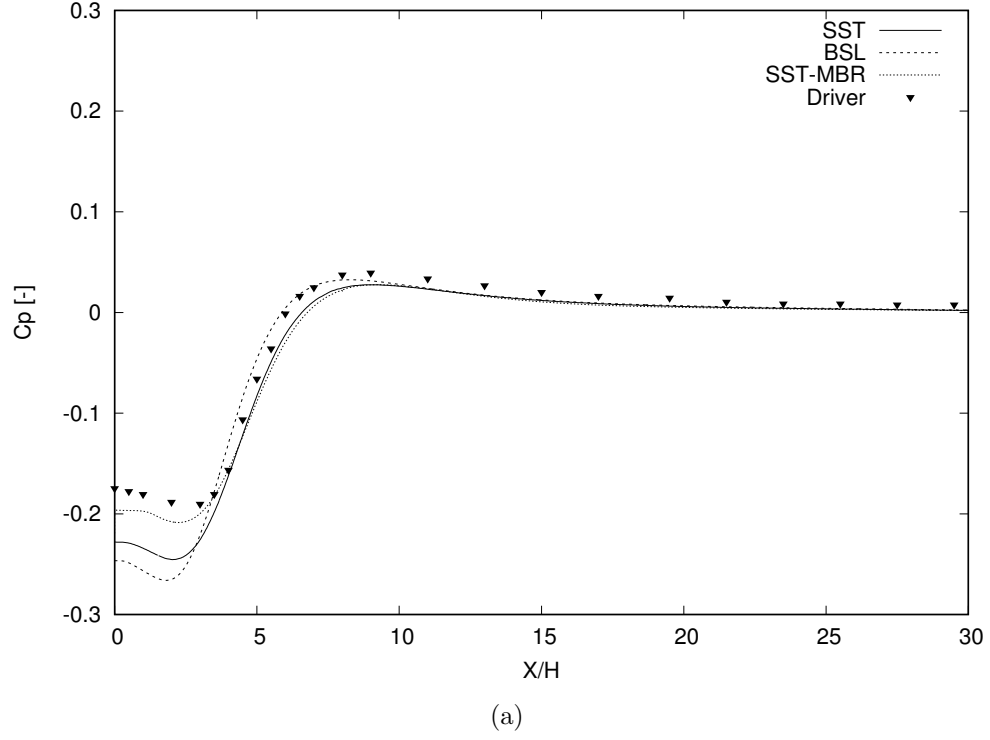


Figure 4.11 (a) Coefficient de pression et (b) coefficient de friction pour le problème de la marche descendante sans gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$

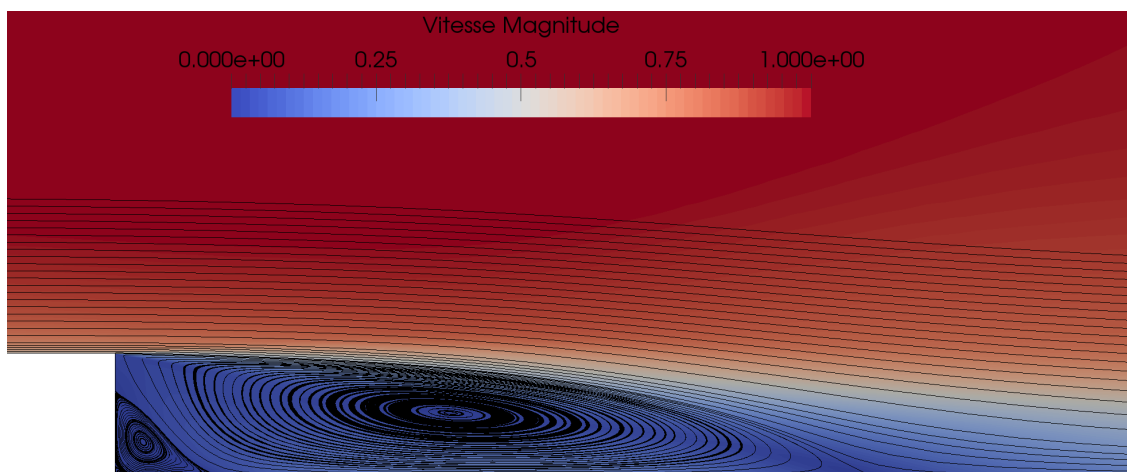


Figure 4.12 Les lignes de courant montrent clairement la première et deuxième bulle de recirculation pour la marche descendante sans gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$.

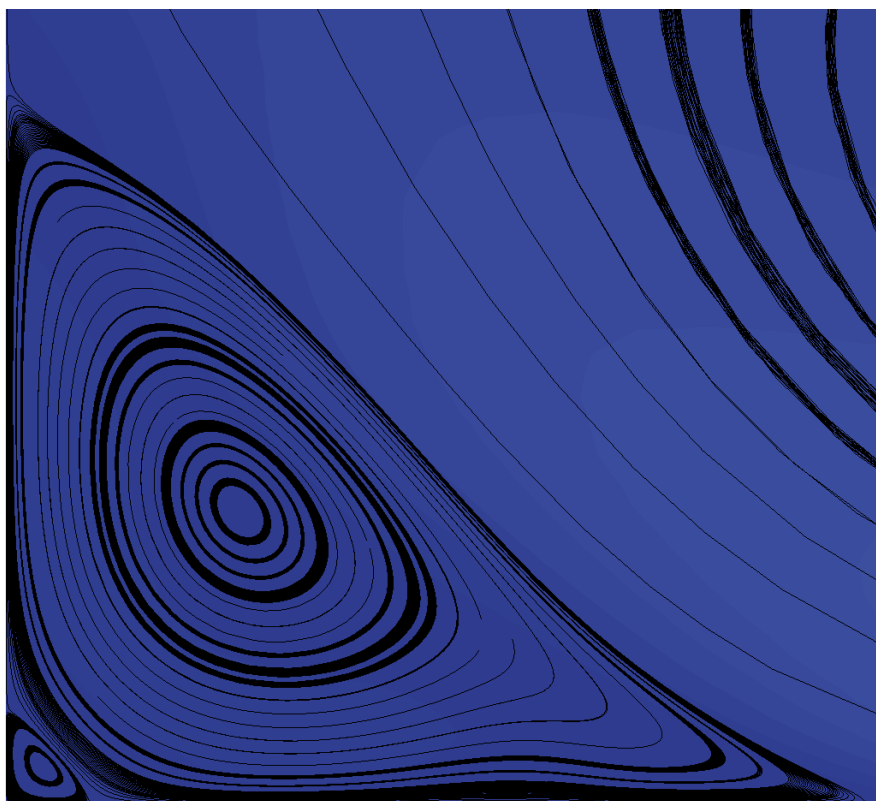


Figure 4.13 Troisième bulle de recirculation pour la marche descendante sans gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$

Comme on l'a vu plus tôt le cas test de la marche descendante est très populaire pour évaluer

les performances des modèles de turbulence. En effet, la physique relativement complexe qui se cache derrière ce problème simple fait ressortir les forces et les faiblesses de bon nombre de modèles RANS. Il existe cependant une variante un peu plus complexe, avec la paroi supérieure inclinée qui induit un gradient de pression adverse. Celle-ci fera d'ailleurs l'objet de la prochaine section.

4.2.3 Marche descendante avec gradient de pression adverse

Le problème de la marche descendante avec paroi supérieure inclinée est plus complexe dans la mesure où il ajoute un degré de difficulté supplémentaire avec un gradient de pression adverse plus important que le cas précédent. L'une des forces du modèle de turbulence $k - \omega$ SST est justement avec les écoulements sujet à de forts gradients de pression. Dans le cas qui nous intéresse, la paroi supérieure est inclinée à 6 degrés. Cette fois-ci cependant, les données de la NASA ne sont pas disponibles, nous nous contenterons donc des données expérimentales pour la comparaison. Les conditions limites sont exactement les mêmes que pour le problème précédent, à l'exception près qu'une condition de tangence a été appliquée sur la paroi supérieure.

Premièrement, en ce qui concerne les profils de vitesse (voir figure 4.15), on remarque d'emblée une certaine disparité avec les profils expérimentaux. Rien d'alarmant. Toutefois, on remarque cette fois-ci que les disparités avec les profils expérimentaux ont tendance à augmenter avec x/h . Ce qui est logique car l'effet du gradient de pression adverse sur les lois de parois est d'abaisser la courbe de u^+ comme on peut le voir sur la figure 4.14. Dans notre cas, les lois de paroi ne sont pas sensibilisées au gradient de pression (Kim et al., 2005), on se retrouve donc à appliquer l'équivalent de la courbe noire sur la figure 4.14, ce qui fait que le cisaillement que nous appliquons à la paroi est systématiquement surestimé par rapport à l'état réel des choses. Ceci a des répercussions en aval de l'écoulement. On peut notamment s'en rendre compte en observant la figure 4.16 sur laquelle on peut clairement voir la surestimation du cisaillement à la paroi ($\overline{u'v'}$ est plus grand à la paroi que l'expérience).

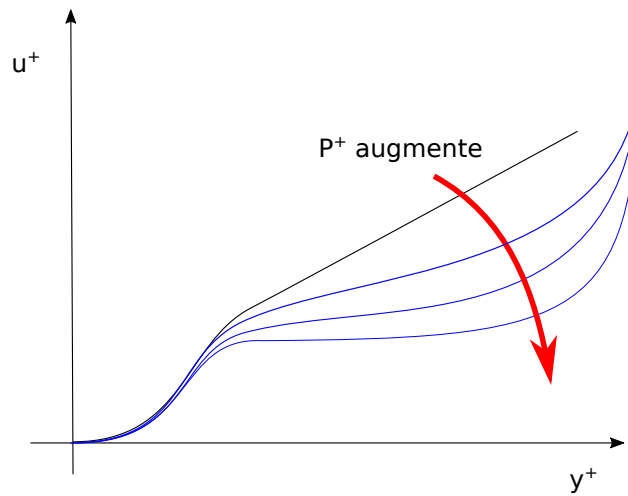


Figure 4.14 Impact du gradient de pression adverse sur les lois de parois

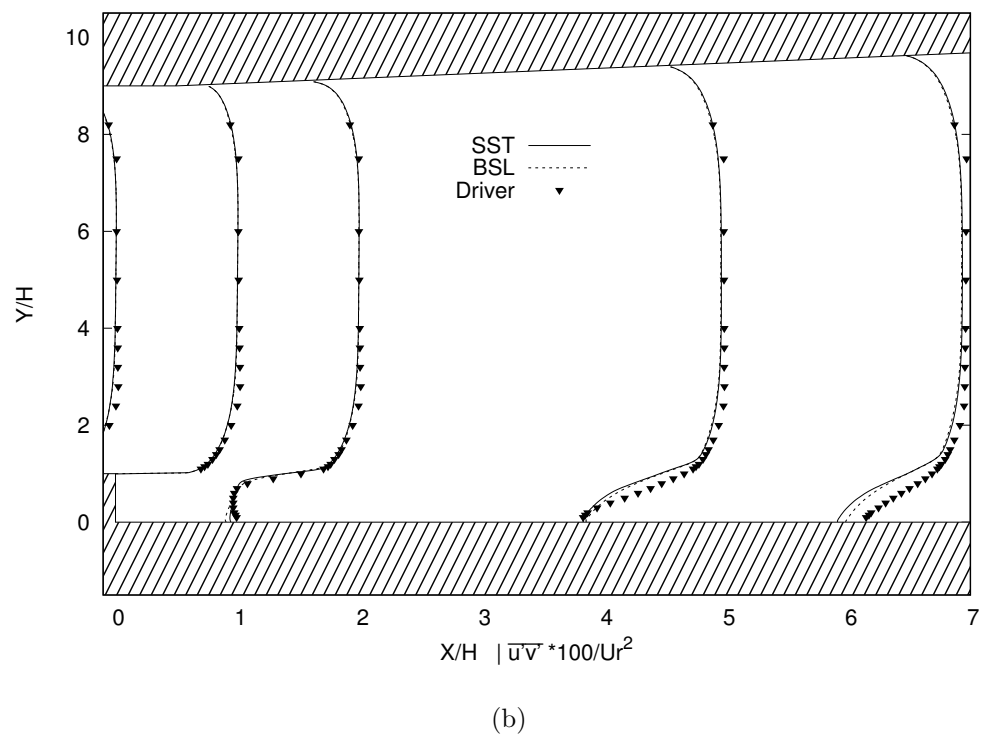
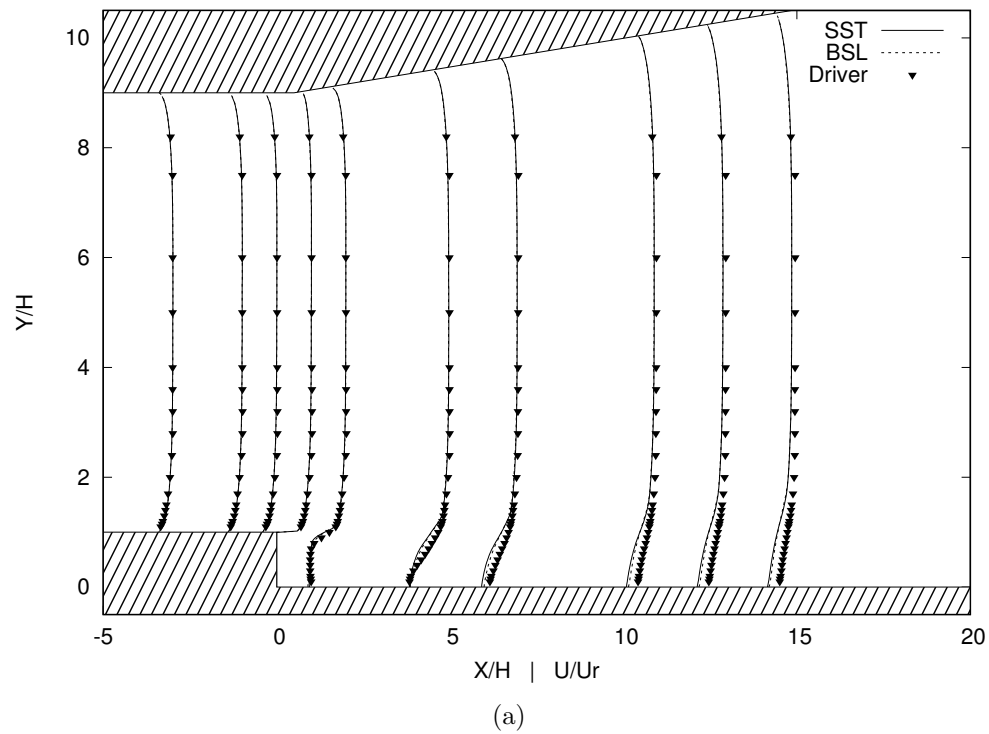
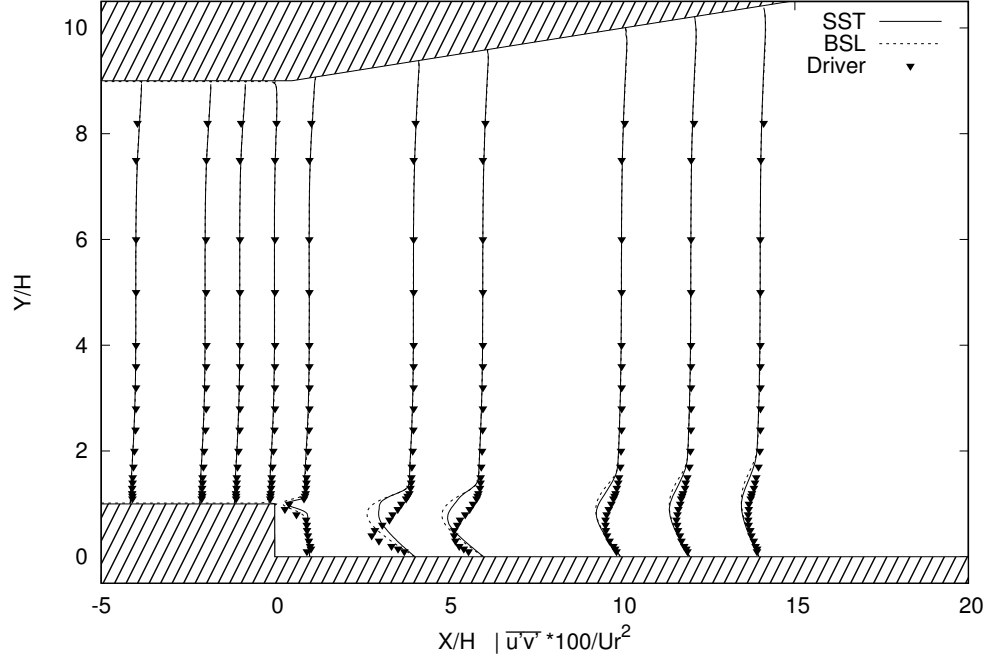
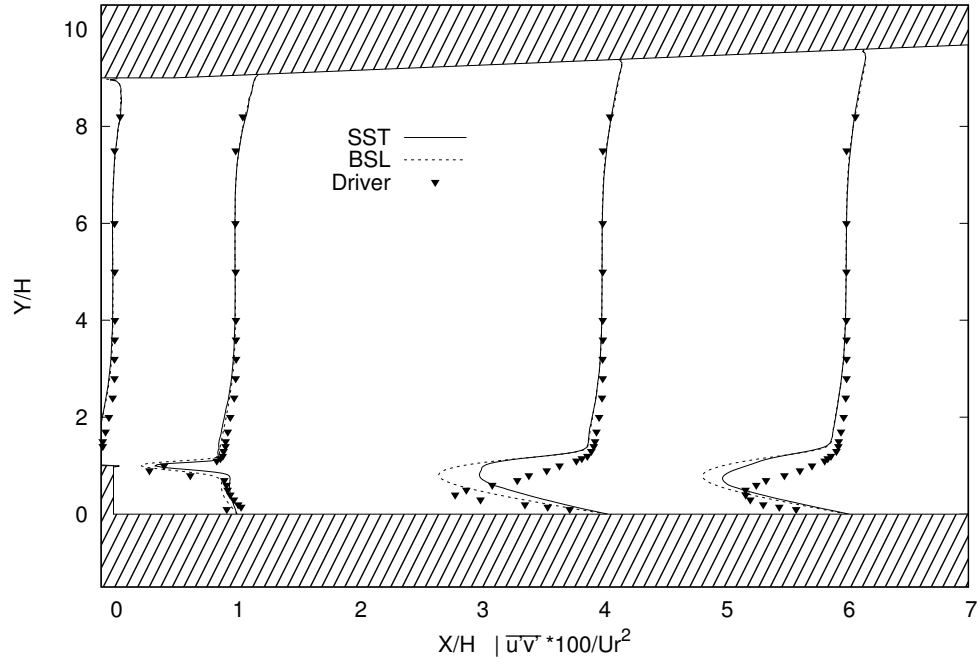


Figure 4.15 (a) Profils de vitesse à différentes stations du problème de la marche descendante avec gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$ (b) Vue rapprochée



(a)



(b)

Figure 4.16 (a) Profils de $\overline{u'v'}$ à différentes stations du problème de la marche descendante avec gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$ (b) Vue rapprochée

La figure 4.17 montre l'évolution du y^+ le long de la paroi inférieure. Comme on peut le voir le raccordement se fait dans la zone de validité des lois de parois. Néanmoins, l'impact du gradient de pression adverse commence à se faire sentir dans les résultats. Il aurait théoriquement été possible de contrer cet effet en raccordant plus profondément dans la loi de paroi. Par exemple, dans la sous-couche visqueuse, qui est très peu influencée par les gradients de pression adverses faibles à modérés. Ultimement, un raccordement à $y^+ = 0 - 5$ sur tout le domaine permettrait de contrer le problème. Sauf qu'en agissant de la sorte, on perd l'attrait des lois de paroi, car ça nous oblige à mailler la sous-couche visqueuse. Malgré tout, les coefficients de pression et de frottement restent raisonnablement près des valeurs expérimentales. Le coefficient de friction du modèle SST passe même pratiquement dans l'incertitude expérimentale par endroit. De plus, comme on peut le voir dans la table 4.2 le point de recollement prédit par le modèle SST arrive à moins de 5% de celui mesuré expérimentalement. En revanche, en ce qui concerne le modèle BSL, l'écart est assez important, à près de 21%.

Tableau 4.2 Comparaison de la longueur de la zone de recirculation obtenues numériquement avec les modèles SST, BSL et SST-MBR avec les données expérimentales pour le cas de la marche descendante avec gradient de pression adverse

Modèles	Point de rattachement (x/h)	Écart [%]
SST	7.79	-4.32
BSL	6.39	-21.3
Driver	8.30	± 0.15

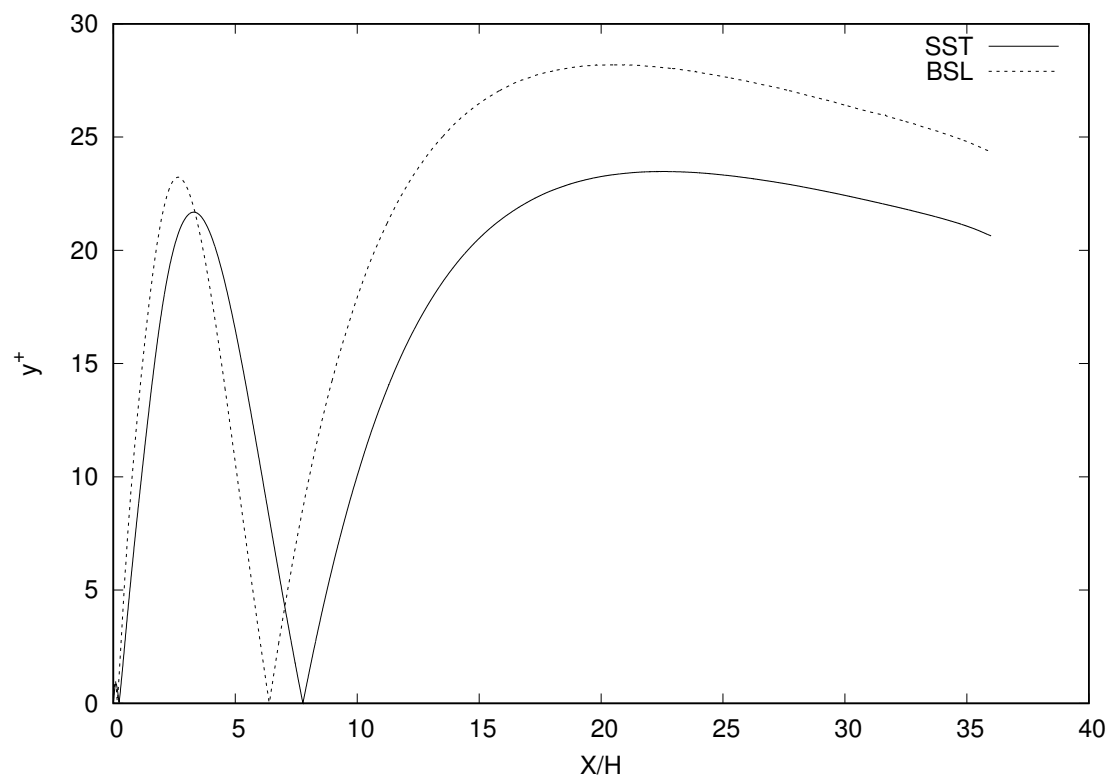


Figure 4.17 Distribution du y^+ le long de la paroi pour le problème de la marche descendante avec gradient de pression adverse

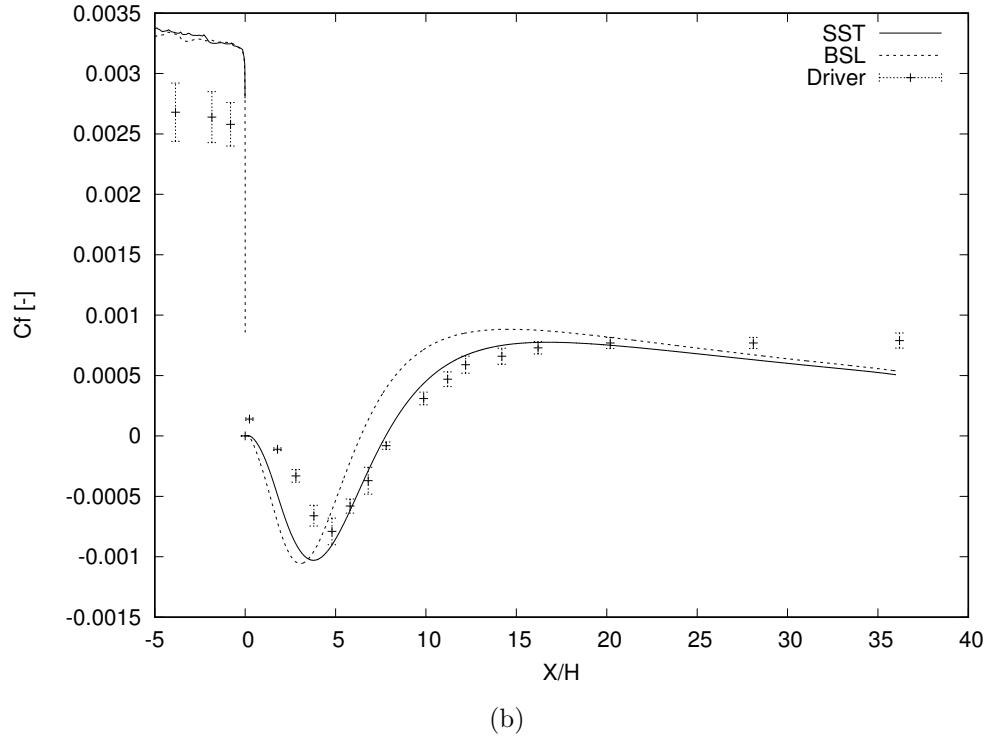
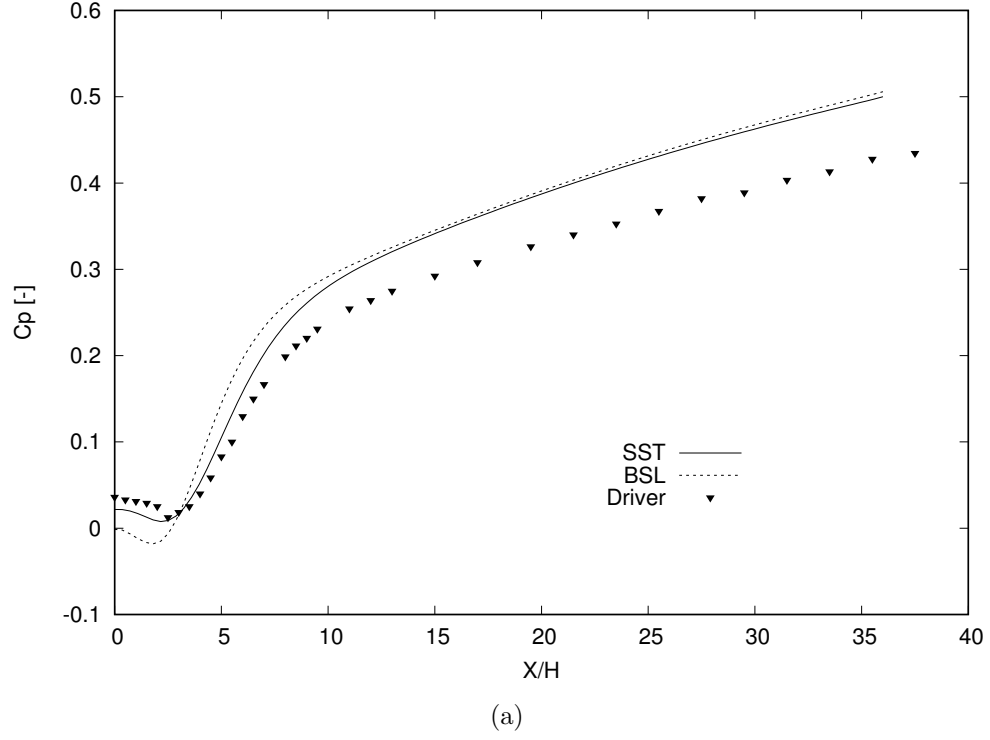


Figure 4.18 (a) Coefficient de pression et (b) coefficient de friction pour le problème de la marche descendante avec gradient de pression adverse à $Re_h = 36000$

Bref, le modèle SST couplé aux lois de paroi consistantes semble encore une fois très robuste dans ses prédictions, et ce, malgré le gradient de pression adverse. On obtient toutefois une tendance erronée loin de la marche pour le coefficient de friction qui tend à diminuer à mesure que x/h augmente. Le prochain cas test auquel nous nous attarderons, assez différent des deux autres, est celui du jet plan 2D.

4.2.4 Jet turbulent impactant avec transfert thermique

Le problème du jet impactant est intéressant dans la mesure où il permet de montrer l'efficacité des lois de paroi à deux échelles de vitesse. En effet, l'un des principaux reproches que l'on fait aux lois de paroi standards à une échelle de vitesse est leur incapacité à traiter les problèmes thermiques comportant des points de stagnation. Comme nous l'avons vu plus tôt, cette incapacité vient du fait que la vitesse tangentielle tend vers 0 au voisinage des points de stagnation. Par ailleurs, le flux de chaleur à la paroi est donné par l'équation 4.32. Or, dans les modèles à une échelle de vitesse, $u_{ech} = \frac{u_t}{u^+} = 0$ au point de stagnation. En revanche, si on base l'échelle de vitesse sur l'énergie cinétique de la turbulence plutôt que sur la vitesse tangentielle, on a $u_{ech} = u_k = \sqrt{\frac{k}{k^+}} \neq 0$, le flux de chaleur ne s'annule plus et devrait même théoriquement atteindre un pic au point de stagnation.

$$q_w = \frac{(T - T_w)u_{ech}c_p}{T^+} \quad (4.32)$$

Pour le problème qui nous intéresse, nous avons choisi de nous fier aux résultats de deux sources différentes (Narayanan et al., 2004) et (Gardon and Akfirat, 1966). La figure 4.19 montre le schéma du montage expérimental. Pour la solution numérique, nous avons choisi d'imposer un glissement sur les parois supérieures ainsi qu'une condition de non-pénétration, l'écoulement est donc confiné entre les deux plaques. Pour ce qui est du jet, la largeur x_{ws} est de 0.5, ce qui donne un diamètre hydraulique de $D_h = 2x_{ws} = 1$. Nous avons imposé un taux de turbulence à l'entrée équivalent à 1% (par rapport à $V = -1$). Le jet est modélisé à partir d'une fonction \tanh afin d'assurer une transition lisse et éviter les problèmes numériques au voisinage de l'entrée du jet. Aux sorties du domaine, une condition libre a été appliquée sur toutes les variables. Finalement, une loi de paroi à deux échelles de vitesse a été appliquée sur la paroi inférieure.

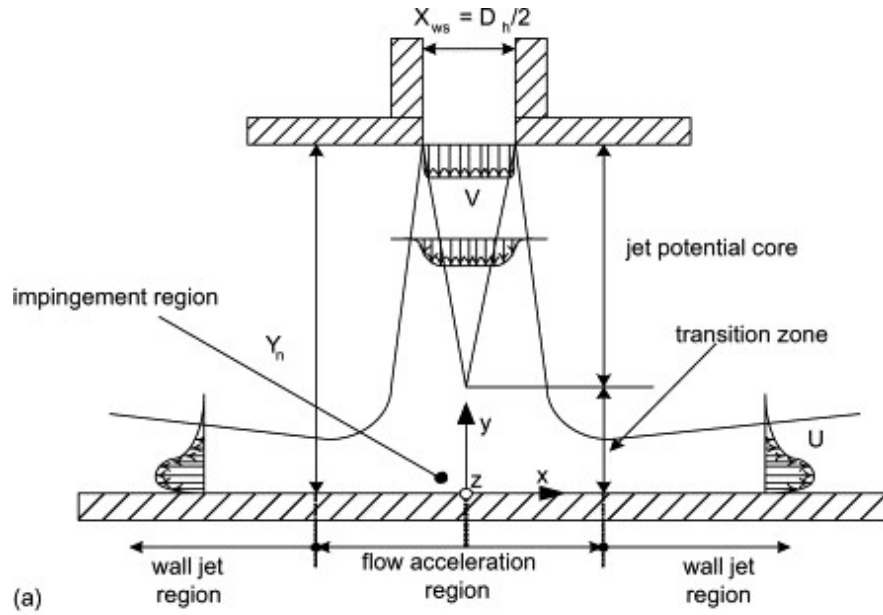


Figure 4.19 Schéma du montage expérimental du jet turbulent impactant avec transfert de chaleur à $Re_{D_n} = 22000$, ©Narayanan et al. (2004). Reproduit avec la permission de Elsevier

En ce qui concerne la stratégie de raffinement du maillage, nous avons choisi d'adapter selon les normes d'erreur de l'énergie, de la température, de la viscosité turbulente ainsi que sur la norme d'erreur équivalente de F_1 . Le facteur de réduction de l'erreur a été fixé à 0.7 afin d'éviter de trop déstabiliser la solution entre chaque cycle d'adaptation. La première solution sur le maillage initial a nécessité l'emploi de l'algorithme semi-couplé avec un facteur de sous relaxation de 0.2. Cependant, sur les autres maillages, il a été possible de débiter immédiatement à l'aide de l'algorithme tout-couplé, puis d'augmenter graduellement le facteur de relaxation jusqu'à atteindre 1. La sous-relaxation n'a plus été nécessaire après le 2e cycle d'adaptation (à partir du maillage (c) sur la figure 4.20). La figure 4.20 montre le maillage de la solution après chaque cycle d'adaptation. On remarque entre autre que l'adaptation s'est effectuée par phases. En effet, sur le deuxième maillage (b), on voit que le raffinement s'est surtout effectué de part et d'autre du jet ainsi que sur la plaque plane afin de bien y capturer les profils de vitesse. Par la suite, sur le troisième maillage (c), les zones de production de la turbulence ont été raffinées (formation d'un M à l'entrée du jet). Sur le quatrième maillage (d), on remarque l'apparition de 2 lignes fines plus denses de chaque côté du jet. Celles-ci correspondent à la jonction entre l'écoulement libre et le sillage du jet et ont été capturées par l'adaptation selon la fonction de pondération F_1 . Finalement, sur les deux derniers maillages, on voit apparaître 4 lignes plus ou moins horizontales, inclinées vers le point de stagnation. Celles-ci ont été produites par l'entremise de la norme énergie.

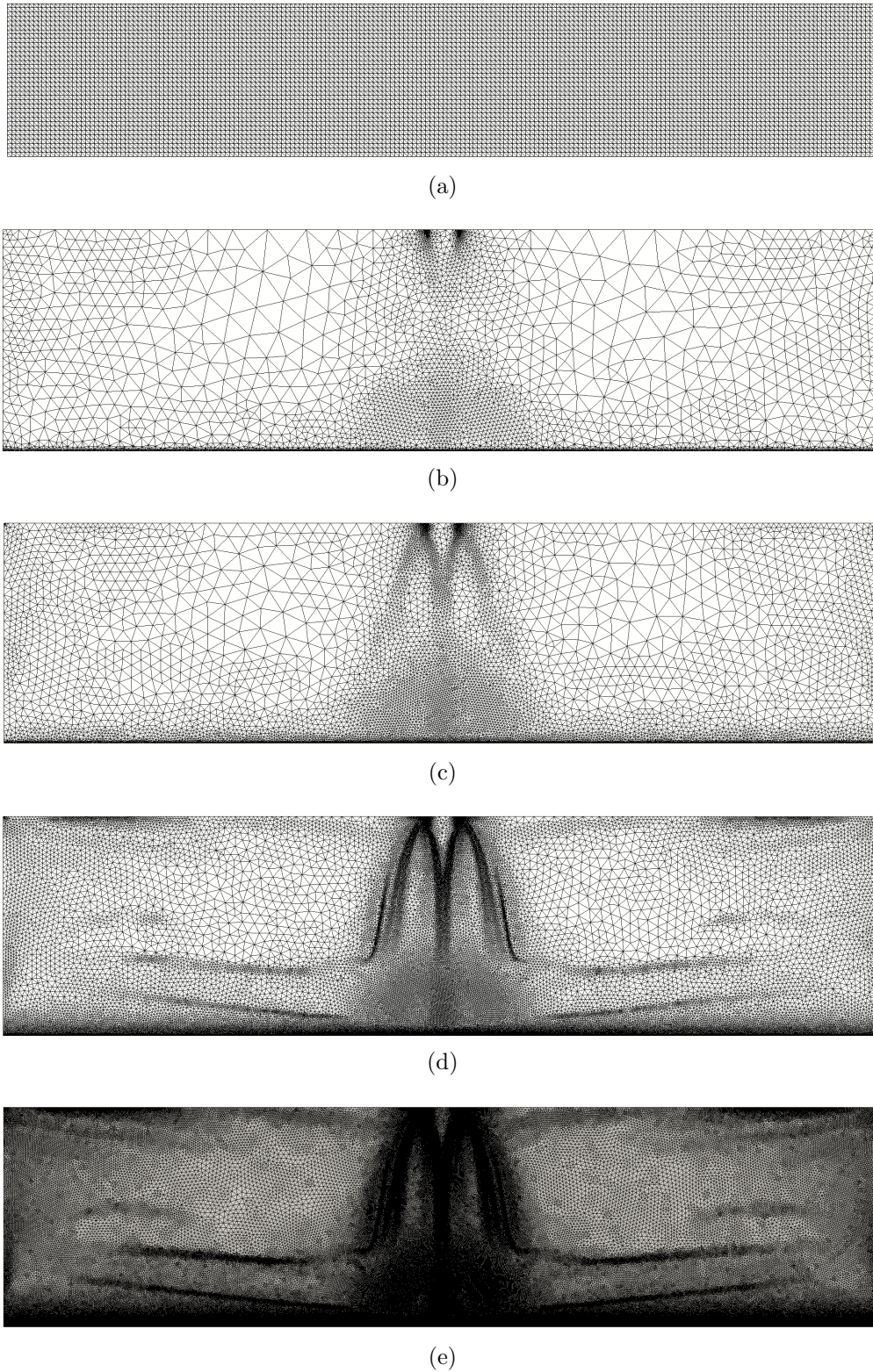


Figure 4.20 Le premier maillage contient près de 30 000 éléments, tandis que le dernier en contient 500 000, la majorité des éléments sont concentrés sur la paroi

Au niveau des résultats, la figure 4.21 montre le coefficient de transfert de chaleur à la paroi mis à l'échelle par rapport au coefficient transfert de chaleur au point de stagnation en fonction de la position x/D_h . La position $x/D_h = 0$ correspond au point de stagnation. On voit que les lois de paroi consistantes à deux échelles de vitesse sont beaucoup plus fidèles aux données expérimentales que le modèle à une échelle de vitesse. Néanmoins, la largeur du pic reste tout de même un problème. Nous obtenons une largeur de pic approximativement égale à 2 fois celle mesurée (la prédiction est encore pire pour le modèle à 1 échelle!). Il faut toutefois rappeler qu'en ayant recours à des lois de paroi à deux échelles de vitesse, on se rapproche des mesures, mais on dénature quelque peu les équations. En effet, les lois de paroi sont basées sur les hypothèses de la couche limite et ne sont donc théoriquement pas définies au voisinage des points de stagnation. Le recours à une deuxième échelle de vitesse pour la modélisation des points de stagnation est donc bénéfique, mais à prendre avec un grain de sel.

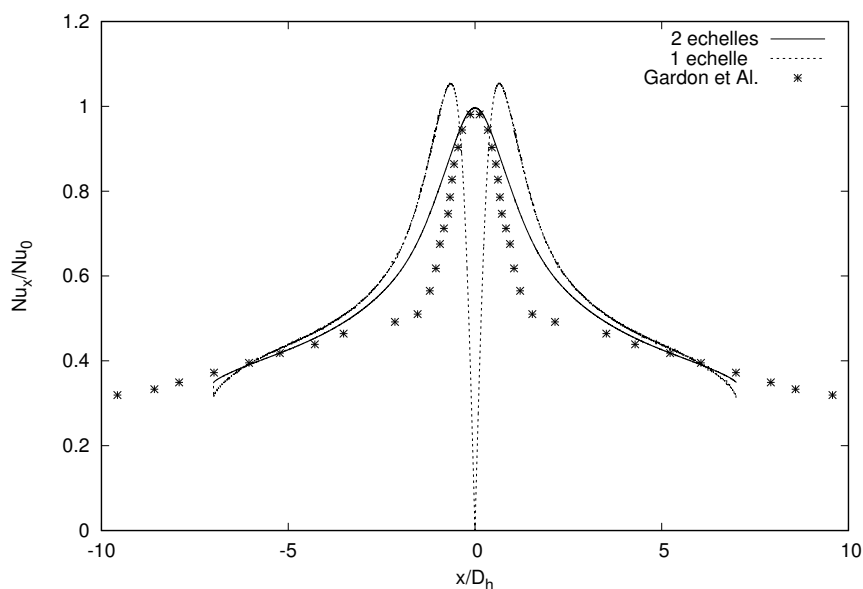


Figure 4.21 Coefficient de transfert de chaleur local Nu mis à l'échelle par rapport au coefficient de transfert de chaleur au point de stagnation Nu_0

Comme on peut le voir sur la figure 4.22, le raccordement de la solution aux lois de paroi se fait dans la sous-couche visqueuse. En raccordant plus profondément encore dans la sous-couche visqueuse ($y^+ \approx 0.1 - 0.2$ au lieu de $y^+ \approx 3 - 4$), les prédictions que nous obtenions semblaient concorder davantage avec l'expérience. Toutefois la condition sur la taille des éléments était trop difficile à atteindre et les coefficients trop bruités pour que nous les présentions. On peut notamment se convaincre de ce constat en examinant la figure 4.22. On y voit notamment que les zones où la distance de raccordement est la plus élevée (près de $|x/D_h| = 2$), correspondent également aux zones où l'écart avec l'expérience y est maximale.

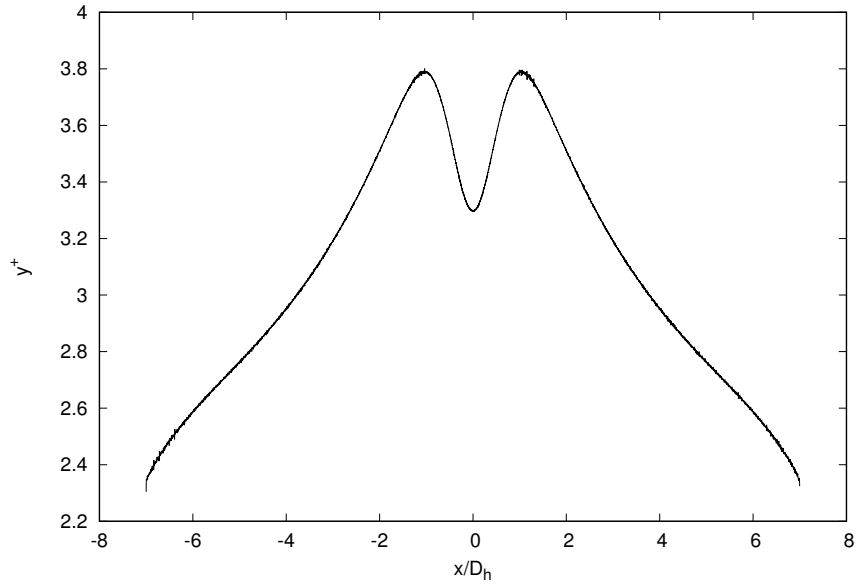


Figure 4.22 Distribution de y^+ en fonction de la distance au point de stagnation

Penchons nous maintenant sur ce qui se passe dans l'écoulement en tant que tel. En comparant nos résultats avec les données expérimentales, on peut voir sur la figure 4.23 que les profils de vitesse (en blanc) ont tendance à être plus diffusifs que ceux qui sont observés expérimentalement, et ce, malgré le fait que nous utilisions le modèle $k - \omega$ SST. Ce modèle limite en effet la production de turbulence dans les zones cisailées. Les résultats seraient probablement pires avec le modèle BSL.

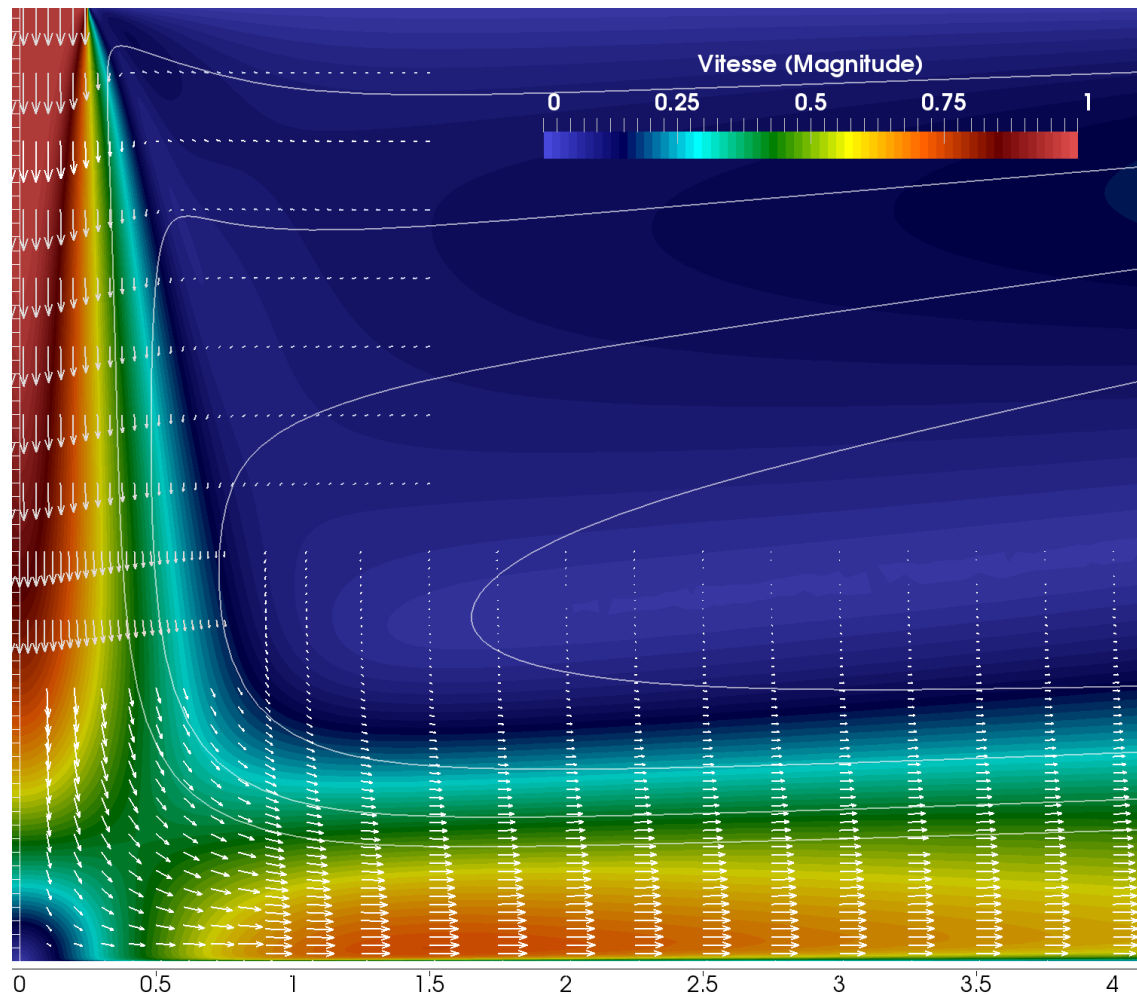


Figure 4.23 Aperçu de la solution du jet impactant à $Re_{D_h} = 22000$ sur le maillage final : 500 000 noeuds

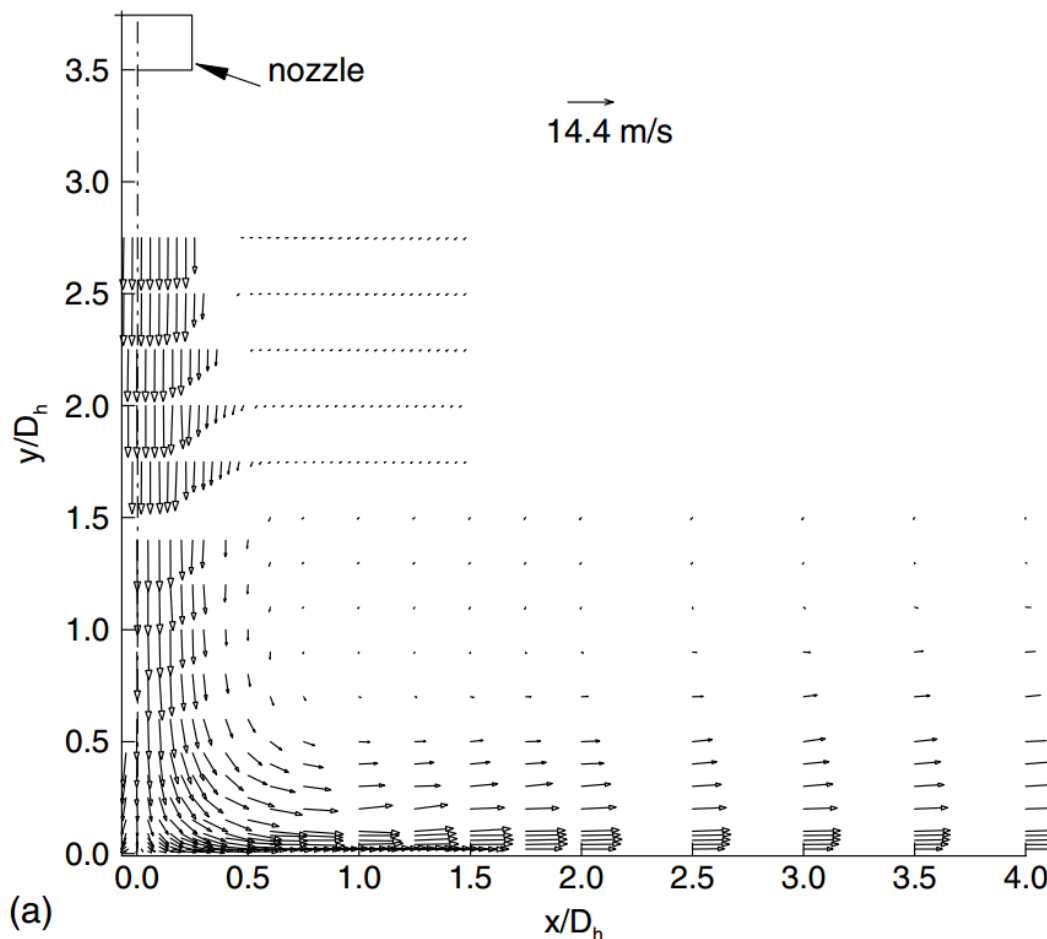


Figure 4.24 Champ vectoriel des mesures expérimentales du jet impactant à $Re_{D_h} = 22000$, ©Narayanan et al. (2004). Reproduit avec la permission de Elsevier

Le problème d'application du jet turbulent impactant a permis de démontrer la pertinence des lois de paroi à deux échelles de vitesse pour le traitement des problèmes avec transfert de chaleur et point de stagnation. Il faut cependant garder à l'esprit que cette modification *ad-hoc* sert principalement à résoudre une disparité avec l'expérience plutôt qu'à combler un vide dans la théorie des lois de paroi.

Ceci met donc fin à la section sur la validation et la vérification des résultats. En conclusion, le modèle de turbulence $k - \omega$ SST couplé aux lois de paroi consistantes a montré des performances surprenantes. Notamment, le niveau de détail qu'il est en mesure de résoudre quand on pense au troisième tourbillon dans le coin inférieur de la marche descendante. Certains aspects pourraient cependant être améliorés dans l'implémentation du modèle. Nous

proposerons donc dans la prochaine section quelques améliorations possibles dans un future rapproché, et aborderons les limites auxquelles se butent les lois de paroi consistantes.

CHAPITRE 5 CONCLUSION

En conclusion, l'objectif principal du projet était de proposer et d'implémenter une formulation tout couplée pour le modèle de turbulence $k - \omega$ SST dans le code de CFD *Cadyf* et de l'utiliser avec des lois de paroi consistantes et consistantes. Afin de garantir la positivité des variables turbulentes durant la totalité de la résolution numérique, le modèle de turbulence a été formulé et résolu sous une forme logarithmique. Les lois de paroi consistantes ont été développées à l'aide d'un code d'éléments finis 1D qui fait la résolution numérique des équations RANS dans la couche limite, jusqu'à la paroi. Les différents profils de u^+ , k^+ , ω^+ et T^+ ont ensuite été tabulés afin d'être utilisés en remplacement des lois de paroi standards. On s'assure ainsi que les conditions limites qu'on applique sont entièrement consistantes avec le modèle de turbulence utilisé.

5.1 Synthèse des travaux

Notre choix s'est arrêté sur le modèle de turbulence $k - \omega$ SST en raison de ses bonnes performances générales dans une multitude de problèmes d'application. En outre, ce modèle est particulièrement performant face à des écoulements avec gradient de pression adverse et a l'avantage d'être intégrable jusqu'à la paroi. Ainsi, il est bien adapté à une utilisation couplée aux lois de paroi consistantes ainsi qu'au développement, dans un futur rapproché, de conditions limites sensibilisées au gradient de pression.

La vérification et la validation du modèle a été effectuée avec succès à l'aide de la technique des solutions manufacturées et d'une série de cas tests. Nous avons ainsi montré qu'il est possible de vérifier le modèle $k - \omega$ SST à l'aide de la technique des solutions manufacturées. Et ce, malgré les discontinuités induites par les fonctions *min/max* qui entrent dans la définition des fonctions de pondération F_1 et F_2 . Celles-ci ont en effet tendance à induire des discontinuités sur les gradients de la solution rendant *a priori* la validation du modèle par cette technique incertaine.

La pertinence d'avoir recours à des lois de paroi consistantes qui soient consistantes avec le modèle de turbulence avec lequel elles sont utilisées a été démontrée à l'aide de plusieurs cas d'étude. Notamment, les résultats obtenus pour la marche descendante ont laissé entrevoir de belles perspectives quant à la possibilité d'utiliser les lois de paroi consistantes comme

une alternative plus flexible et moins coûteuse aux modèles bas-Reynolds.

Finalement, les schémas numériques de résolution des équations de turbulence couplée et semi-couplée se sont montrées efficaces, quoique leur stabilité est très sensible aux conditions initiales. De plus, bien que le recours aux lois de paroi consistantes ait eu un impact sur le taux de convergence de la méthode de Newton, celui-ci est demeuré super-linéaire, ce qui a tout de même permis de faire de bonnes économies au niveau du temps de calcul.

5.2 Limitations de la solution proposée

En ce qui concerne les limitations de l'approche des lois de paroi consistantes, la principale lacune provient des hypothèses inhérentes au développement des lois de paroi. En effet, celles-ci ont été développées à partir des hypothèses de la couche limite ; leur validité est donc floue au voisinage des points de stagnation. Il est ainsi difficile d'estimer à partir de quelle distance du point de stagnation elles redeviennent valides. Le recours à la formulation à deux échelles de vitesse permet, certes, de rapprocher les résultats numériques de l'expérience, mais ne comble aucune lacune dans la théorie. En d'autres mots, on traite les symptômes et non la source du problème. Les lois de paroi consistantes ne présentent pas d'autre lacune particulière si ce n'est qu'elles doivent être utilisées dans le bon régime d'application, elles pourraient cependant être améliorées à bien des égards.

5.3 Améliorations futures

5.3.1 Sensibilisation au gradient de pression

Dans le cadre du projet, nous avons implémenté les lois de paroi à l'aide de tables contenant les profils de u^+ , k^+ , ω^+ et T^+ dans la couche limite. Cependant, ces profils ont été obtenus à partir des hypothèses d'une couche limite sans gradient de pression. Il serait relativement simple de les sensibiliser au gradient de pression en produisant plusieurs courbes pour différents gradients de pression. Puis, d'interpoler à partir d'une surface dépendant de y^+ et p^+ plutôt que d'une courbe unique pour chaque profil dépendant de y^+ seulement. De façon plus large, il serait également possible de sensibiliser les équations par rapport à d'autres paramètres sans pour autant complètement changer les hypothèses de la couche limite. Par exemple en incluant un terme de transpiration à la paroi ($V \neq 0$) ou encore un terme pour tenir compte de la rugosité de la surface comme c'est le cas pour les lois de paroi standards.

5.3.2 Distance de raccordement variable

Pour déterminer le point de raccordement y^+ nécessaire à l'interpolation des lois de paroi, il est nécessaire de fournir la distance physique d entre le maillage et la paroi. Or, dans l'état actuel du code, d est entrée comme un paramètre fixe, une constante. Il serait intéressant d'implémenter une nouvelle fonctionnalité permettant de fournir une distribution variable de d . Il serait ainsi possible de choisir le niveau de détail de la solution en fonction de sa position dans l'espace. On pourrait par exemple choisir le paramètre d de manière à viser un raccordement dans la région logarithmique dans les zones moins critiques. Tandis qu'on pourrait à l'inverse viser un raccord dans la sous couche visqueuse, voire même intégrer jusqu'à la paroi, dans les zones plus critiques comme l'extrados d'un profil d'aile en décrochage.

5.3.3 Condition de tangence

L'avantage de résoudre les équations en formulation tout couplée à l'aide de la méthode de Newton-Raphson, est de bénéficier d'un taux de convergence quadratique. Or, l'application de la condition de tangence se fait à l'aide d'une simple méthode de pénalisation, ce qui mène parfois à une dégradation du taux de convergence de la méthode de résolution (Stokes and Carey, 2011), en particulier lorsqu'on traite de problème comportant des frontières complexes, comme une cavité par exemple. Ainsi, on perd un peu l'attrait de la formulation couplée. Il serait judicieux d'opter pour une méthode qui n'ait pas ce défaut, par exemple, une méthode mixte, ou des multiplicateurs de Lagrange permettrait de remédier à la situation.

5.3.4 Adaptation du maillage

Bien que l'adaptation du maillage selon F_1 et F_2 ait aidé à la convergence des solutions, nous pensons que l'adaptation par rapport à d'autres paramètres pourrait grandement aider. On pourrait penser à l'adaptation selon le y^+ (Knopp et al., 2006). En effet, dans les zones de décollement où le cisaillement pariétal et donc la vitesse tangentielle est faible, le y^+ a tendance à tendre vers 0. Or, même si la validité des lois de paroi n'y est pas claire, ces zones nécessitent un raffinement de maillage qui n'est pas nécessairement capté par les méthodes d'adaptation classiques. Ces dernières se basent généralement sur la norme de l'erreur absolue comme indicateur pour le raffinement du maillage, par conséquent, ces zones où la norme de la solution est faible risquent d'être oubliées.

RÉFÉRENCES

- E. Andres, “Discrete circles, rings and spheres”, *Computers & Graphics*, vol. 18, no. 5, pp. 695–706, 9 1994. DOI : 10.1016/0097-8493(94)90164-3
- Aokomoriuta. (2011) Law of the wall. En ligne : https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_the_wall
- D. Aronson, A. V. Johansson, et L. Löfdahl, “Shear-free turbulence near a wall”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 338, may 1997. DOI : 10.1017/S0022112097005065
- V. S. Arpaci et P. S. Larsen, *Convection heat transfer*. Prentice-Hall, 1984.
- G. Biswas, M. Breuer, et F. Durst, “Backward-Facing Step Flows for Various Expansion Ratios at Low and Moderate Reynolds Numbers”. DOI : 10.1115/1.1760532
- J. Bresenham, “Graphics and A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs”, *IBM System Communications Division*, vol. 20(2), pp. 100–106, 1977. DOI : 10.1145/359423.359432
- A. N. Brooks et T. J. Hughes, “Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 32, no. 1-3, pp. 199–259, 9 1982. DOI : 10.1016/0045-7825(82)90071-8
- Cham. (2004) Méthode de newton. En ligne : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Methode_newton.png
- M. Chmielewski et M. Gieras, “Three-zonal Wall Function for k- ϵ Turbulence Models”, *CMST*, vol. 19, no. 2, pp. 107–114, 2013. DOI : 10.12921/cmst.2013.19.02.107-114
- E. Colin, “Analyse de sensibilités de transfert de chaleur turbulent”, Thèse de doctorat, Polytechnique Montréal, 2003.
- J. J. Donea et A. Huerta, *Finite element methods for flow problems*. Wiley, 2003.
- D. Driver et H. Seegmiller, “Features of a reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow”, *AIAA journal*, vol. 23, no. 2, pp. 163—171, 1985.

S. Dufour et D. Pelletier, “An adaptive finite element method for multiphase flows with surface tension”, *Computational Mechanics : New Trends and Applications*, pp. 1–18, 1998.

P. A. Durbin, “Near-wall turbulence closure modeling without “damping functions””, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, vol. 3, no. 1, pp. 1–13, 1991.

ERCOFTAC, “European Research Community on Flow, Turbulence and Combustion Database Classic Collection”, 2016. En ligne : <http://cfd.mace.manchester.ac.uk/ercoftac/>

E. Fares et W. Schröder, “A differential equation for approximate wall distance”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 39, no. 8, pp. 743–762, 7 2002. DOI : 10.1002/flid.348

A. Fortin, *Analyse numerique pour ingenieurs*. Presses internationales Polytechnique, 2011.

L. Frazza, A. Hay, et D. Pelletier, “A logarithmic formulation for low-Reynolds number turbulence models with adaptive wall-functions”, dans *22nd AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. Reston, Virginia : American Institute of Aeronautics and Astronautics, jun 2015. DOI : 10.2514/6.2015-2464

R. Gardon et J. C. Akfirat, “Heat Transfer Characteristics of Impinging Two-Dimensional Air Jets”, *Journal of Heat Transfer*, vol. 88, no. 1, p. 101, 1966. DOI : 10.1115/1.3691449

W. K. George, “Is there a universal log law for turbulent wall-bounded flows?” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 365, no. 1852, 2007.

N. E. Gharbi, R. Absi, A. Benzaoui, et E. H. Amara, “Effect of near-wall treatments on airflow simulations”, nov 2010. En ligne : <http://arxiv.org/abs/1011.6043>

S. D. Hall, M. Behnia, C. A. J. Fletcher, et G. L. Morrison, “Investigation of the secondary corner vortex in a benchmark turbulent backward-facing step using cross-correlation particle imaging velocimetry”, *Experiments in Fluids*, vol. 35, no. 2, pp. 139–151, aug 2003. DOI : 10.1007/s00348-003-0626-9

L. Ignat, D. Pelletier, et F. Ilinca, “Adaptative computations of turbulent forced convection”, vol. 348, pp. 847–871, 1998. DOI : 10.1080/10407789808914019

W. Jones et B. Launder, “The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence”, *International journal of heat and mass transfer*, 1972. DOI :

10.1016/0017-9310(72)90076-2

G. Kalitzin, G. Medic, G. Iaccarino, et P. Durbin, “Near-wall behavior of RANS turbulence models and implications for wall functions”, *Journal of Computational Physics*, vol. 204, no. 1, pp. 265–291, 2005. DOI : 10.1016/j.jcp.2004.10.018

J. Kim, S. Kline, et J. Johnston, “Investigation of a reattaching turbulent shear layer : flow over a backward-facing step”, *ASME J. Fluids Eng*, vol. 102, no. 3, pp. 302–308, 1980.

J. Kim, A. Ghajar, et C. Tang, “Comparison of near-wall treatment methods for high Reynolds number backward-facing step flow”, *International Journal of*, vol. 19, no. 7, pp. 493–500, 2005. DOI : 10.1080/10618560500502519

S. Kim et D. Choudhury, “No Title”, *Separated and complex flows*, pp. 273—280, 1995.

T. Knopp, “Model-consistent universal wall-functions for rans turbulence modelling”, dans *Proceedings International Conference BAIL*, 2006.

T. Knopp, T. Alrutz, et D. Schwamborn, “A grid and flow adaptive wall-function method for RANS turbulence modelling”, *Journal of Computational Physics*, vol. 220, no. 1, pp. 19–40, 2006. DOI : 10.1016/j.jcp.2006.05.003

A. Kolmogorov, “Dissipation of energy in locally isotropic turbulence”, dans *Mathematical and Physical Sciences*, vol. 434, no. 1. Royal Society, 1890, pp. 15—17.

M. A. Kopera, R. M. Kerr, H. M. Blackburn, et D. Barkley, “Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step”, *Journal of Fluid Mechanics*, 2014.

D. Lacasse, “Application d’une méthode d’éléments finis adaptative à des écoulement turbulents”, Thèse de doctorat, Polytechnique Montréal, 2000.

B. E. Launder et B. I. Sharma, “Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc”, *Letters in Heat and Mass Transfer*, vol. 1, Nov.-Dec. 1974, p. 131-137. *Science Research Council*, vol. 1, pp. 131–137, 1974.

B. E. Launder et D. B. Spalding, “The numerical computation of turbulent flows”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 3, no. 2, pp. 269–289, 1974. DOI : 10.1016/0045-7825(74)90029-2

J. H. Lienhard et J. H. Lienhard, *A heat transfer textbook*, 4e éd. Cambridge : Courier Corporation, 2013.

C. Liu, Y. Yan, et Y. Yang, “DNS Study on Eddy Viscosity Turbulence Model”, University of Texas Arlington, Rapp. tech., sept. 2014.

M. Mani, J. A. Ladd, et W. W. Bower, “Rotation and Curvature Correction Assessment for One-and Two-Equation Turbulence Models”, *Journal of Aircraft*, vol. 41, no. 2, pp. 268–273, mar 2004. DOI : 10.2514/1.9321

F. R. Menter, “Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications”, *AIAA Journal*, vol. 32, no. 8, pp. 1598–1605, aug 1994. DOI : 10.2514/3.12149

F. Menter, “Improved two-equation k-omega turbulence models for aerodynamic flows”, Ames Research Center (NASA), Moffett Field, Rapp. tech., 1992. En ligne : <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19930013620>

F. Menter, M. Kuntz, et R. Langtry, “Ten years of industrial experience with the SST turbulence model”, *Turbulence, heat and mass transfer*, vol. 4, no. 1, pp. 625–632, 2003.

P. Moin et J. Kim, “Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step”, *J. Fluid Mech*, vol. 330, pp. 349–374, 1997. DOI : 10.1017/S0022112096003941

A. W. Moore, “Effecient memory-based learning for robot control”, Thèse de doctorat, University of Cambridge, 1990. DOI : 10.1016/j.j.crme.2009.03.010

V. Narayanan, J. Seyed-Yagoobi, et R. Page, “An experimental study of fluid mechanics and heat transfer in an impinging slot jet flow”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 47, no. 8, pp. 1827–1845, 2004. DOI : 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2003.10.029

NASA, “Notes on Running the Cases with CFD”, 2016. En ligne : <https://turbmodels.larc.nasa.gov/noteonrunning.html>

L. R. C. NASA, “Menter Shear Stress Transport Model”, 2015. En ligne : <https://turbmodels.larc.nasa.gov/sst.html>

F. Navah, “Une formulation monolithique des modèles de turbulence à deux équations : calcul éléments finis d’écoulements et de sensibilités”, Thèse de doctorat, Polytechnique Montréal.

H. Ninokata, N. Tanaka, et A. Wada, *Advances in Fluid Modeling & Turbulence Measurements : Proceedings of the 8th International Symposium on Flow Modeling and Turbulence Measurements : Tokyo, Japan, 4-6 December 2001*. World Scientific, 2002. En ligne : <https://books.google.ca/books?id=e5nWs-v0PXoC>

S. P. et S. Allmaras, “A one-equation turbulence model for aerodynamic flows”, dans *30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reston, Virigina : American Institute of Aeronautics and Astronautics, jan 1992. DOI : 10.2514/6.1992-439

D. Pelletier, *Éléments Finis en Mécanique des Fluides - MEC6210*, 1er éd. Montréal : presse international polytechnique, 2016.

B. Perot et P. Moin, “Shear-free turbulent boundary layers. Part 1. Physical insights into near-wall turbulence”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 295, no. -1, p. 199, jul 1995. DOI : 10.1017/S0022112095001935

Pethrus. (2007) Algorithmme de tracé de cercle d’andres. En ligne : https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithmme_de_trac%C3%A9_de_cercle_d%27Andres#/media/File:Cercle_concentrique_andres.png

S. B. Pope, *Turbulent Flows*, 1er éd. New-York : Cambridge University Press, 2000.

L. Prandtl, “Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper”, *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 8, no. 2, pp. 85–106, 1928. DOI : 10.1002/zamm.19280080202

L. Prandtl, W. Tollmien, H. Schlichting, H. Görtler, et F. W. Riegels, “Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz”, dans *Ludwig Prandtl Gesammelte Abhandlungen*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1945, pp. 874–887. DOI : 10.1007/978-3-662-11836-8_72

L. Richardson, *Weather Prediction by Numerical Process*, 1er éd. Cambridge : Cambridge University Press, 2007.

B. Roget et J. Sitaraman, “Wall distance search algorithm using voxelized marching spheres”, *Journal of Computational Physics*, vol. 241, pp. 76–94, 2013. DOI : 10.1016/j.jcp.2013.01.035

H. Schlichting et K. Gersten, *Boundary-Layer Theory*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2017. DOI : 10.1007/978-3-662-52919-5

F. G. Schmitt, “About Boussinesq’s turbulent viscosity hypothesis : historical remarks and a direct evaluation of its validity”, vol. 335, no. 910, pp. 617–627, 2007. En ligne : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00264386/document>

- P. E. Smirnov et F. R. Menter, “Sensitization of the SST Turbulence Model to Rotation and Curvature by Applying the Spalart–Shur Correction Term”, *Journal of Turbomachinery*, vol. 131, no. 4, p. 041010, 2009. DOI : 10.1115/1.3070573
- P. Spalart et C. Rumsey, “Effective inflow conditions for turbulence models in aerodynamic calculations”, *AIAA journal*, vol. 45, no. 10, pp. 2544–2553, 2007. DOI : 10.2514/1.29373
- D. B. Spalding, “Monograph on turbulent boundary layer”, Imperial London College, London, Rapp. tech., 1967.
- C. G. Speziale, “Analytical Methods for the Development of Reynolds-Stress Closures in Turbulence”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 23, no. 1, pp. 107–157, jan 1991. DOI : 10.1146/annurev.fl.23.010191.000543
- C. G. Speziale, R. Abid, et E. Anderson, “Critical evaluation of two-equation models for near-wall turbulence”, Langley Research Center (NASA), Hampton, Rapp. tech., 1992. DOI : 10.2514/3.10922
- Y. Stokes et G. Carey, “On generalised penalty approaches for slip, free surface and related boundary conditions in viscous flow simulation”, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, vol. 21, no. 6, pp. 668–702, 8 2011. DOI : 10.1108/09615531111148455
- D.-W. Sun, *Computational fluid dynamics in food processing*. Boca Raton : CRC Press, 2007.
- G. I. Taylor, “Statistical Theory of Turbulence”, *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 151, no. 873, pp. 509–529, 1935.
- M. H. A. Tezduyar, Tayfun, F. G. Rammerstorfer, et J. Eberhardsteiner, “Stabilization Parameters and Local Length Scales in SUPG and PSPG Formulations”, dans *Fifth World Congress on Computational Mechanics*, 2002. En ligne : http://www.tafsm.org/PUB_PRE/ipALL/ip84-WCCM02-SP.pdf
- N. H. Thomas et P. E. Hancock, “Grid turbulence near a moving wall”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 82, no. 03, p. 481, sep 1977. DOI : 10.1017/S0022112077000792
- F. Tocci, “Assessment of a hybrid vof two-fluid cfd solver for simulation of gas-liquid flows in vertical pipelines in openfoam”, Thèse de doctorat, Politecnico di Milano, 2016.

A. A. Townsend et G. Taylor, “Experimental evidence for the theory of local isotropy”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 44, no. 4, p. 560, oct 1948. DOI : 10.1017/S0305004100024567

A. Velikorodny, G. Duck, et P. Oshkai, “Effect of a Flexible Wall on a Reattaching Turbulent Shear Layer”, *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol. 132, no. 4, pp. 1–9, 2010. DOI : 10.1115/1.4001948

F. M. White, *Fluid mechanics*. McGraw Hill, 2011.

D. C. Wilcox, “Formulation of the k-w turbulence model revisited”, *AIAA journal*, vol. 46, no. 11, pp. 2823–2838, 2008. DOI : 10.2514/1.36541

——, *Turbulence modeling for CFD*. La Canada : DCW Industries, 1998.

M. Wolfshtein, “The velocity and temperature distribution in one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 12, no. 3, pp. 301–318, mar 1969. DOI : 10.1016/0017-9310(69)90012-X

O. C. Zienkiewicz et J. Z. Zhu, “The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 2 : Error estimates and adaptivity”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, no. 7, pp. 1365–1382, may 1992. DOI : 10.1002/nme.1620330703

——, “The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1 : The recovery technique”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, no. 7, pp. 1331–1364, may 1992. DOI : 10.1002/nme.1620330702

ANNEXE A : DÉVELOPPEMENT DES ÉQUATIONS DE K ET ω SANS DIMENSION

La formulation adimensionnelle des équations de turbulence permet de mieux mettre en évidence la physique et l'impact des paramètres sur chacun des termes des équations. Il devient par exemple plus facile de *voir* quels termes deviennent dominant lorsque le nombre de Reynolds augmente. De plus, elle permet également de réduire la raideur numérique du système à résoudre puisqu'en choisissant les variables de références adéquates, il est possible d'amener toutes les variables résolues (u , v , P , T , k , ω) à un ordre de grandeur similaire, la plupart du temps 1. Pour ce faire, nous débutons avec les équations 2.1 et 2.2.

$$\rho u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \quad (1)$$

$$\rho u_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = P_\omega - \beta^* \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega^2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (2)$$

On propose ensuite de rendre les variables adimensionnelles de la manière suivante.

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_r} \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_r} \quad \tilde{\mu}_t = \frac{\mu_t}{\mu_{tr}} \quad (3)$$

$$\tilde{u}_i = \frac{u_i}{u_r} \quad \tilde{k} = \frac{k}{u_r^2} \quad \tilde{\omega} = \frac{L_r}{u_r} \omega \quad (4)$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma_r} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \frac{x_i}{L_r}} = L_r \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \tilde{\tau}_{ij} = \frac{u_r \mu_{tr}}{L_r} \tau_{ij} \quad (5)$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\left[\frac{\rho_r u_r^3}{L_r} \right] \tilde{\rho} \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{x}_i} = \tilde{P}_k - \left[\frac{\rho_r u_r^3}{L_r} \right] \beta^* \tilde{\rho} \tilde{\omega} \tilde{k} + \left[\frac{u_r^2}{L_r^2} \right] \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left[(\mu_r \tilde{\mu} + \sigma_k \mu_{tr} \tilde{\mu}_t) \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{x}_i} \right] \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\rho_r u_r^2}{L_r^2} \right] \tilde{\rho} \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{x}_i} &= \tilde{P}_\omega - \left[\frac{\rho_r u_r^2}{L_r^2} \right] \beta^* \tilde{\rho} \tilde{\omega}^2 + \left[\frac{u_r}{L_r^3} \right] \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left[(\mu_r \tilde{\mu} + \sigma_\omega \mu_{tr} \tilde{\mu}_t) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{x}_i} \right] \\ &+ \left[\frac{\rho_r u_r^2}{L_r^2} \right] 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega^2} \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{x}_i} \end{aligned} \quad (7)$$

Avec

$$\tilde{P}_k = \min \left(\left[\frac{\mu_{tr} u_r^2}{L_r^2} \right] \tilde{\tau}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i}, \left[\frac{\rho_r u_r^3}{L_r} \right] 10 \beta^* \tilde{\rho} \tilde{\omega} \tilde{k} \right) \quad (8)$$

$$\tilde{P}_w = \min \left(\left[\frac{\rho_r \gamma_r u_r^2}{L_r^2} \right] \tilde{\tau}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i}, \left[\frac{\rho_r^2 \gamma_r u_r^3}{\mu_{tr} L_r} \right] 10 \beta^* \tilde{\rho} \tilde{\omega} \tilde{k} \right) \quad (9)$$

En réarrangeant les termes, on arrive à

$$\tilde{\rho} \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{x}_i} = \tilde{P}_k - \beta^* \tilde{\rho} \tilde{\omega} \tilde{k} + \left[\frac{1}{\rho_r u_r L_r} \right] \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left[(\mu_r \tilde{\mu} + \sigma_k \mu_{tr} \tilde{\mu}_t) \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{x}_i} \right] \quad (10)$$

$$\tilde{\rho} \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{x}_i} = \tilde{P}_\omega - \beta^* \tilde{\rho} \tilde{\omega}^2 + \left[\frac{1}{\rho_r u_r L_r} \right] \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left[(\mu_r \tilde{\mu} + \sigma_\omega \mu_{tr} \tilde{\mu}_t) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{x}_i} \right] + 2(1 - F_1) \tilde{\rho} \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{x}_i} \quad (11)$$

Avec

$$\tilde{P}_k = \min \left(\left[\frac{\mu_{tr}}{\rho_r u_r L_r} \right] \tilde{\tau}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i}, 10 \beta^* \tilde{\omega} \tilde{\rho} \tilde{k} \right) \quad (12)$$

$$\tilde{P}_w = \min \left([\gamma_r] \tilde{\tau}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i}, \left[\frac{\rho_r \gamma_r u_r L_r}{\mu_{tr}} \right] 10 \beta^* \tilde{\rho} \tilde{\omega} \tilde{k} \right) \quad (13)$$

$$Re_t = \frac{\rho U L_r}{\mu_t} \quad (14)$$

Et finalement,

$$\boxed{\tilde{\rho} \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{x}_i} = \tilde{P}_k - \beta^* \tilde{\rho} \tilde{\omega} \tilde{k} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left[\left(\frac{\tilde{\mu}}{Re} + \sigma_k \frac{\tilde{\mu}_t}{Re_t} \right) \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{x}_i} \right]} \quad (15)$$

$$\boxed{\tilde{\rho} \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{x}_i} = \gamma_r Re_t \tilde{P}_k - \beta^* \tilde{\rho} \tilde{\omega}^2 + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left[\left(\frac{\tilde{\mu}}{Re} + \sigma_\omega \frac{\tilde{\mu}_t}{Re_t} \right) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{x}_i} \right] + 2(1 - F_1) \tilde{\rho} \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{x}_i}} \quad (16)$$

Avec

$$\tilde{P}_k = \min \left(\left[\frac{1}{Re_t} \right] \tilde{\tau}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i}, 10 \beta^* \tilde{\omega} \tilde{\rho} \tilde{k} \right) \quad (17)$$